2021　大阪大 2

問 1 消費地での抵抗が r，電圧が $v(t) = V\sin\omega t$ だから，$P_{\mathrm{A}}(t) = \underline{\underline{\dfrac{V^2}{r}\sin^2(\omega t)}}$

問 2 抵抗での電圧と電流の位相は同じであるから，時刻 t で消費地に流れる電流 $i_r(t)$ は

$$i_r(t) = I_r \sin\omega t$$

である．したがって，消費電力 $P_{\mathrm{A}}(t)$ は，

$$P_{\mathrm{A}}(t) = i_r(t)v(t) = I_r V \sin^2(\omega t)$$

ここで，$\sin^2(\omega t)$ の時間平均は $\dfrac{1}{2}$ であるから，時間平均消費電力 $\overline{P_{\mathrm{A}}}$ は，

$$\overline{P_{\mathrm{A}}} = \frac{1}{2} I_r V$$

より，$I_r = \underline{\underline{\dfrac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}}}$

問 3 コンデンサーにかかる電圧の最大値 V と流れる電流 I_{C} の間には，容量リアクタンス $\dfrac{1}{\omega C}$ を用いて次の関係が成り立つ．

$$V = \frac{1}{\omega C} I_{\mathrm{C}}$$
$$\therefore \quad I_{\mathrm{C}} = \underline{\underline{\omega C V}}$$

問 4 コンデンサーにかかっている電圧は $v(t) = V\sin\omega t$ である．コンデンサーに流れる電流は，かかる電圧に対して位相が $\dfrac{\pi}{2}$ 進んでいる．したがって，時刻 t にコンデンサーに流れる電流 $i_{\mathrm{C}}(t)$ は，問 3 の結果も考慮して

$$i_{\mathrm{C}}(t) = \omega C V \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) = \omega C V \cos\omega t$$

したがって，送電線に流れる電流 $i_R(t)$ は

$$\begin{aligned} i_R(t) &= i_r(t) + i_{\mathrm{C}}(t) \\ &= I_r \sin\omega t + \omega C V \cos\omega t \\ &= \frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\sin\omega t + \omega C V \cos\omega t \\ &= \sqrt{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 + (\omega C V)^2}\sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \end{aligned}$$

したがって，送電線に流れる電流 $i(t)$ の最大値 I_R は，

$$I_R = \underline{\underline{\sqrt{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 + (\omega C V)^2}}}$$

問 5 問 4 より，時刻 t での 2 本の送電線全体で消費する電力 $P_{\mathrm{B}}(t)$ は

$$P_{\mathrm{B}}(t) = \{i_R(t)\}^2 R \times 2 = 2R\left\{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 + (\omega CV)^2\right\}\sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$$

$\sin^2\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right)$ の時間平均は $\frac{1}{2}$ なので，

$$\overline{P_{\mathrm{B}}} = \underline{\underline{R\left\{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 + (\omega CV)^2\right\}}}$$

問 6 相加相乗平均の不等式より

$$\begin{aligned} R\left\{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 + (\omega CV)^2\right\} &\geqq 2R\sqrt{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 \cdot (\omega CV)^2} \\ &= 4R\overline{P_{\mathrm{A}}}\omega C \end{aligned}$$

であり，$\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V} = \omega CV$ すなわち，$V = V_{\min} = \underline{\underline{\sqrt{\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{\omega C}}}}$ のとき，$\overline{P_{\mathrm{B}}}$ の最小値は，$\underline{\underline{4R\overline{P_{\mathrm{A}}}\omega C}}$

問 7 $V = 500 \times 10^3$[V]，$\omega = 2\pi \times 60$[rad/s]，$R = 0.10 \times 100 = 10[\Omega]$，$C = 0.10 \times 100 \times 10^{-6} = 10 \times 10^{-6}$[F]，$\overline{P_{\mathrm{A}}} = 10^9$[W] を問 5 の $\overline{P_{\mathrm{B}}} = R\left\{\left(\frac{2\overline{P_{\mathrm{A}}}}{V}\right)^2 + (\omega CV)^2\right\}$ に代入すれば，約 20 万 kW．すなわち，<u>(え)</u>