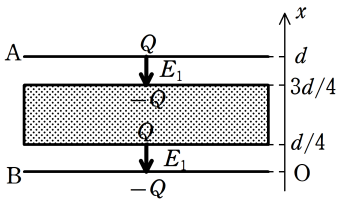
2021　東京医科歯科大 2

問 1 (1) スイッチを閉じたままの操作なので，電位差は変わらない．極板間隔を 2 倍にして，電位差は変わらないので，電場の強さは$\dfrac{1}{2}$倍.[*1] また，電場の強さが $\dfrac{1}{2}$ 倍なので，電気量も$\dfrac{1}{2}$倍.[*2] 電気量が $\dfrac{1}{2}$ 倍，電位差は変わらないので，静電エネルギーは$\dfrac{1}{2}$倍.[*3]

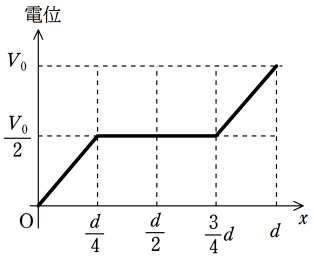
(2) スイッチを開けたままの操作なので，電気量は変わらない．電気量が変わらないので，電場の強さも変わらない．電場の強さが変わらず，極板間隔を 2 倍にしたので，電位差は 2 倍．電気量が変わらず，電位差が 2 倍なので，静電エネルギーは 2 倍.

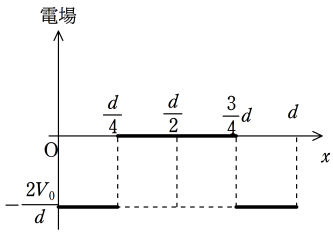
問 2 (1) 操作を終えた後の A と金属板，B と金属板の間の電場の強さを E_1 とする．AB 間の電位差は V_0 であること，金属内部の電場は 0 であることから，電場と電位差の関係式より



$$E_1 \cdot \frac{d}{4} \times 2 = V_0$$
$$E_1 = \frac{2V_0}{d}$$

求めるグラフは下図.





(2) 操作前の電場の強さは，$E_0 = \dfrac{V_0}{d}$ であり，操作後も電荷が変化しないことから，A と金属板，B と金属板の間の電場の強さも変化しない.

したがって，求めるグラフは下図.

[*1] 距離 Δx，電位差 ΔV の電場の強さ E は

$$E = \frac{\Delta V}{\Delta x}$$

これは縦軸を電位，横軸を位置でグラフをかいたときのグラフの傾きの絶対値に相当する.

[*2] 電場の強さを E，面積 S を垂直に貫く電気力線の本数を N とすると，

$$E = \frac{N}{S}$$

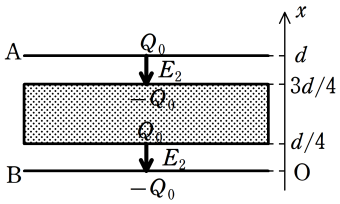
である．電気力線の本数 N は，電荷を Q，誘電率を ε，クーロンの比例定数を k とすると，

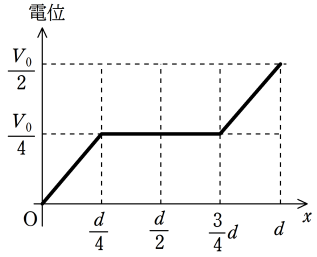
$$N = 4\pi k|Q| = \frac{|Q|}{\varepsilon}$$

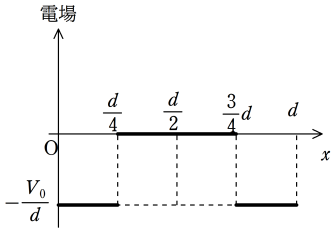
である.

[*3] コンデンサーに電気量 Q が蓄えられていて，電位差が V のときの静電エネルギー U は

$$U = \frac{1}{2}QV$$







問 3 (1) $x < -a$，$-a < x < a$，$a < x$ で場合分けをして電位を求める．

- $x < -a$ のとき

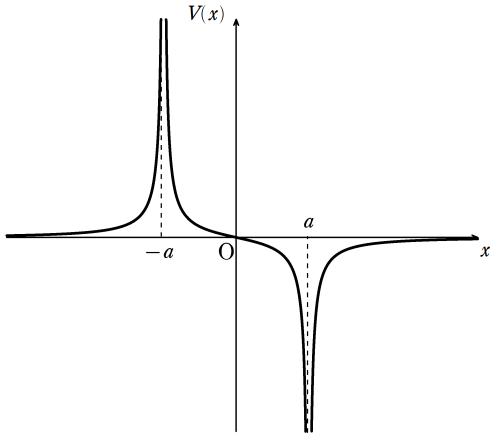
$$V(x) = \frac{kq}{-a-x} + \frac{k\cdot(-q)}{a-x} = \underline{\underline{\frac{2akq}{x^2-a^2}}}$$

- $-a < x < a$ のとき

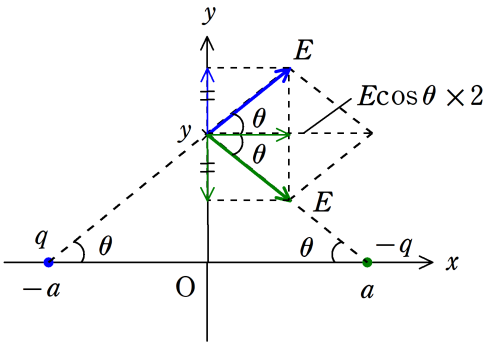
$$V(x) = \frac{kq}{x+a} + \frac{k\cdot(-q)}{a-x} = \underline{\underline{\frac{2kqx}{x^2-a^2}}}$$

- $x < a$ のとき

$$V(x) = \frac{kq}{x+a} + \frac{k\cdot(-q)}{x-a} = \underline{\underline{-\frac{2akq}{x^2-a^2}}}$$



(2) まず，$y > 0$ について考える．
図のように，角度 θ をとると，$\cos\theta = \dfrac{a}{\sqrt{y^2+a^2}}$．また，C , D にある電荷が $(0, y)$ の位置につくる電場の大きさは $E = k\dfrac{q}{y^2+a^2}$ である．このうち，y 軸成分は打ち消し 0 となり，



x 軸成分のみ残る．電場の x 成分 E_x は

$$E_x = E\cos\theta \cdot 2 = \frac{2kaq}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}}$$

$y \leqq 0$ でも同様の式になるので，求める電場ベクトルは $\vec{E} = \underline{\underline{\left(\frac{2kaq}{(y^2+a^2)^{\frac{3}{2}}},\ 0\right)}}$

(3) $\mathrm{P}(x, y)$ における電位は

$$V = \frac{kq}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{k\cdot(-q)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} \quad \cdots$$

ところで，

$$\begin{aligned}
\frac{1}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} &= \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}\sqrt{1+\frac{a^2}{x^2+y^2}+\frac{2ax}{x^2+y^2}}} \\
&\fallingdotseq \frac{1}{r\sqrt{1+\frac{2ax}{r^2}}} \\
&= \frac{1}{r}\left(1+\frac{2ax}{r^2}\right)^{-\frac{1}{2}} \\
&\fallingdotseq \frac{1}{r}\left(1-\frac{ax}{r^2}\right)
\end{aligned}$$

同様に，

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}} = \frac{1}{r}\left(1+\frac{ax}{r^2}\right)$$

これらと $(*)$ より $V = \underline{\underline{-\frac{2kqax}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}}}$

(4) (x, y) における電位 V は

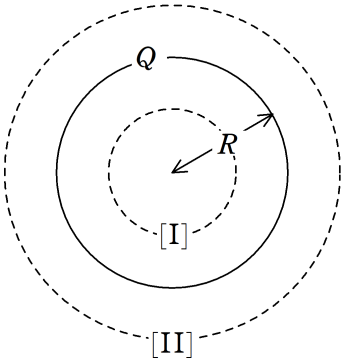
$$V = \frac{kq}{\sqrt{(x+a)^2+y^2}} + \frac{k\cdot\left(-\frac{q}{2}\right)}{\sqrt{(x-a)^2+y^2}}$$

$V = 0$ を代入して，整理すると

$$\underline{\underline{\left(x-\frac{5}{3}a\right)^2+y^2 = \left(\frac{4}{3}a\right)^2}}$$

これは，<u>中心が $\left(\frac{5}{3}a, 0\right)$，半径 $\frac{4}{3}a$ の円を表す．</u>

問 4 (1) ガウスの法則より，電場の強さを求める．



(I) $0 < r < R$ のとき,

$$E(r) = \frac{4\pi k \cdot 0}{4\pi r^2}$$
$$\therefore \quad E(r) = 0$$

(II) $R < r$ のとき

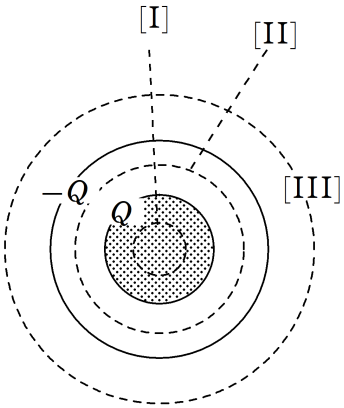
$$E(r) = \frac{4\pi k \cdot Q}{4\pi r^2}$$
$$\therefore \quad E(r) = \frac{kQ}{r^2}$$

以上より，$E(r) = \begin{cases} 0 & (0 < r < R) \\ \dfrac{kQ}{r^2} & (R < r) \end{cases}$

(2) 球殻の内側部分の単位体積あたりの電荷 ρ は,

$$\rho = \frac{Q}{\frac{4}{3}\pi\left(\frac{R}{2}\right)^3} = \frac{6Q}{\pi R^3}$$

である．同じく，ガウスの法則により電場の強さ求める．



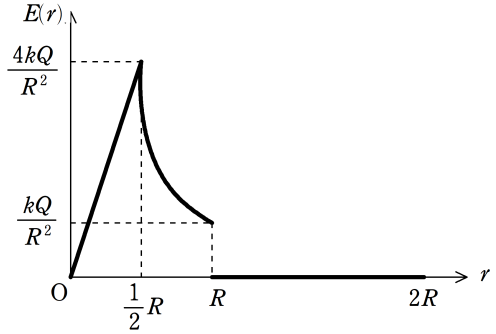
(I) $0 < r \leqq \dfrac{R}{2}$ のとき,

$$E(r) = \frac{4\pi k \cdot \frac{6Q}{\pi R^3} \cdot \frac{4}{3}\pi r^3}{4\pi r^2} = \frac{4kQ}{R^3} r$$

(II) $\dfrac{R}{2} \leqq R$ のとき

$$E(r) = \frac{4\pi kQ}{4\pi r^2} = \frac{kQ}{r^2}$$

(III) $R \leqq r$ のとき

$$E(r) = \frac{4\pi k(Q-Q)}{4\pi r^2} = 0$$

以上より，$E(r) = \begin{cases} \dfrac{8kQ}{R^3}r & (0 < r \leqq \dfrac{R}{2}) \\ \dfrac{kQ}{r^2} & (\dfrac{R}{2} \leqq R) \\ 0 & (R \leqq r) \end{cases}$ グラフは下図.