2021　お茶の水女子 1

(1)　反発係数の式より，

$$1 = -\frac{v_1 - v_2}{v - 0} \quad \therefore \quad \underline{\underline{v_1 - v_2 = -v}} \quad \ldots \quad (*)$$

また，運動量保存則より

$$m_1 v = m_1 v_1 + m_2 v_2 \quad \ldots \quad (2*)$$

$(*)$，$(2*)$ より，$v_1 = \underline{\underline{\dfrac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v}}$，$v_2 = \underline{\underline{\dfrac{2m_1}{m_1 + m_2}v}}$

(2) (1) より

$$\begin{aligned} \mathit{\Delta} E &= \frac{1}{2}m_1 v^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 \\ &= \frac{1}{2}m_1 \left\{ (v^2 - \left(\frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v\right)^2 \right\} \\ &= \underline{\underline{\frac{2m_1^2 m_2}{(m_1 + m_2)^2}v^2}} \end{aligned}$$

(3) (2) で得た式の分子分母を $(m_2)^2$ 割って

$$\mathit{\Delta} E = \frac{2 \cdot \dfrac{m_1^2}{m_2}v^2}{\left(\dfrac{m_1}{m_2} + 1\right)^2}$$

ここで，$m_2 \to \infty$ のとき，$\mathit{\Delta} E \to 0$ となる．

(4) 三角比を考えて，$\underline{\underline{\sin\alpha = \dfrac{b}{2r}}}$

(5) 衝突後の円盤 A の速さを V_1，円盤 B の速さを V_2 とする．x 成分，y 成分の運動量保存則より

$$m_1 v = m_1 V_1 \cos\theta + m_2 V_2 \cos\alpha \quad \ldots \quad (3*)$$
$$0 = m_1 V_1 \sin\theta - m_2 V_2 \sin\alpha \quad \ldots \quad (4*)$$

$(4*)$ より，$V_2 = \dfrac{m_1 \sin\theta}{m_2 \sin\alpha}V_1 \quad \ldots \quad (5*)$.

$(5*)$ を $(3*)$ に代入して

$$\begin{aligned} \cancel{m_1} v &= \cancel{m_1} V_1 \cos\theta + \cancel{m_2} \cdot \frac{\cancel{m_1}\sin\theta}{\cancel{m_2}\sin\alpha}V_1 \cos\alpha \\ v\sin\alpha &= V_1 \sin\alpha\cos\theta + V_1 \sin\theta\cos\alpha \\ V_1 \sin(\theta + \alpha) &= v\sin\alpha \\ V_1 &= \frac{\sin\alpha}{\sin(\theta + \alpha)}v \quad \ldots \quad (6*) \end{aligned}$$

したがって，

$$E_1 = \frac{1}{2}m_1 V_1^2 = \underline{\underline{\frac{m_1 \sin^2\alpha}{2\sin^2(\theta+\alpha)}v^2}}$$ [*1]

(6) (5) で得た式において，θ のみが変数である．E_1 が最小になるのは，$\sin(\theta+\alpha)$ が最大になるときである．つまり，$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ のとき．((7) の答え).
一方，反発係数の式より

$$1 = -\frac{V_1\cos(\theta+\alpha)-V_2}{v\cos\alpha - 0}$$

$\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ より

$$v\cos\alpha = V_2 \qquad \ldots \qquad (7*)$$

また，(5∗)，(6∗) と $\theta+\alpha=\dfrac{\pi}{2}$ より，$V_2 = \dfrac{m_1\sin\left(\frac{\pi}{2}-\alpha\right)}{m_2}v = \dfrac{m_1}{m_2}v\cos\alpha$ を (7∗) に代入して，$m_2 = \underline{\underline{m_1}}$ を得る．

(7) $\theta = \underline{\underline{\dfrac{\pi}{2}-\alpha}}$

[*1] 以後の設問を見ると，問題の意図としては，θ を使わないで表現が適切なのかもしれなが，以後の計算が楽なのと文字の指定がないので，θ を用いた．