[I]

P の速さを v_{P} とする．向心方向の運動方程式より

$$m\frac{v_{\mathrm{P}}^2}{a} = G\frac{M_{\mathrm{A}}m}{a^2}$$
$$\therefore v_{\mathrm{P}} = \underbrace{\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{A}}}{a}}}_{(ア)}$$

分裂後，P_1 の接線方向の速度は $v_{\mathrm{P}} = \sqrt{\dfrac{G_{\mathrm{A}}}{a}}$ のままで，向心方向の速度成分が v_1 であるから，P_1 の力学的エネルギー E は

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m_1(v_{\mathrm{P}}^2 + v_1^2) + \left(-G\frac{M_{\mathrm{A}}m_1}{a}\right) \\
&= \frac{1}{2}m_1v_{\mathrm{P}}^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_{\mathrm{A}}m_1}{a} \\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{A}}}{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_{\mathrm{A}}m_1}{a} \\
&= \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_{\mathrm{A}}m_1}{2a}}_{(イ)}
\end{aligned}$$

無限遠まで飛び去る条件は $E > 0$ である．(イ) を用いて

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_{\mathrm{A}}m_1}{2a} > 0$$
$$\therefore v_1 > \underbrace{\sqrt{\frac{GM_{\mathrm{A}}}{a}}}_{(ウ)}$$

AC の距離を x とし，A と B の角速度を ω とする．A と B は万有引力によって C を中心に等速円運動しているので，向心方向の運動方程式より

$$\begin{cases}
M_{\mathrm{A}}x\omega^2 = \dfrac{GM_{\mathrm{A}}M_{\mathrm{B}}}{R^2} & \cdots(*) \\
M_{\mathrm{B}}(R-x)\omega^2 = \dfrac{GM_{\mathrm{A}}M_{\mathrm{B}}}{R^2} & \cdots(2*)
\end{cases}$$

$(*)$，$(2*)$ より

$$M_{\mathrm{A}}x\cancel{\omega^2} = M_{\mathrm{B}}(R-x)\cancel{\omega^2}$$
$$\therefore x = \underbrace{\frac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}}_{(エ)}R$$

また，(エ) を $(*)$ に代入して ω を求めると

$$\cancel{M_{\mathrm{A}}} \times \frac{\cancel{M_{\mathrm{B}}}}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}R \times \omega^2 = \frac{G\cancel{M_{\mathrm{A}}}\cancel{M_{\mathrm{B}}}}{R^2}$$
$$\therefore \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{G(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})}{R}} \quad \cdots(3*)$$

また，(エ) より

$$
\begin{aligned}
R - x &= R - \frac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}} R \\
&= \frac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}} R
\end{aligned}
$$

であるから，B の速さ v_{B} は

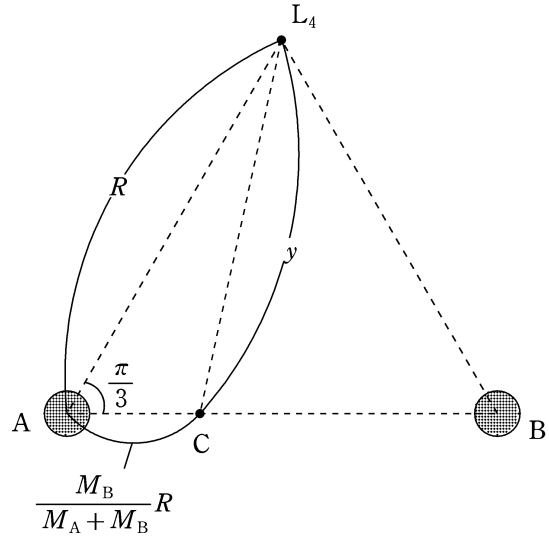
$$
\begin{aligned}
v_{\mathrm{B}} &= (R - x)\omega \\
&= \frac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}} \cancel{R} \times \frac{1}{\cancel{R}} \sqrt{\frac{G(M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}})}{R}} \\
&= \underbrace{M_{\mathrm{A}} \sqrt{\frac{G}{R(M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}})}}}_{(\text{オ})}
\end{aligned}
$$

Q は A，B に対して相対位置を変えないということから，A，B と同じく角速度 ω で円運動している．したがって，その周期 T は

$$
\begin{aligned}
T &= \frac{2\pi}{\omega} \\
&= \underbrace{2\pi R \sqrt{\frac{R}{G(M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}})}}}_{(\text{カ})}
\end{aligned}
$$

Q にはたらく合力を F とする．Q は C を中心に半径 r で角速度 ω の等速円運動をしている．向心方向の運動方程式より

$$
\begin{aligned}
m' r \omega^2 &= F \\
\therefore F &= G m' (M_{\mathrm{A}} + M_{\mathrm{B}}) \times \underbrace{\frac{r}{R^3}}_{(\text{キ})}
\end{aligned}
$$



三角形 $\mathrm{ACL_4}$ について余弦定理の式を立てて，$\mathrm{L_4C}$ の距離 y を求める．

$$\begin{aligned} y^2 &= R^2 + \left(\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R\right)^2 - 2R\left(\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R\right)\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{M_\mathrm{A}^2+M_\mathrm{A}M_\mathrm{B}+M_\mathrm{B}^2}{(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})^2}R^2 \\ \therefore y &= \frac{R\sqrt{M_\mathrm{A}^2+M_\mathrm{A}M_\mathrm{B}+M_\mathrm{B}^2}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}} \end{aligned}$$

Q にはたらく万有引力の合力の大きさを F' とする．Q は半径 y，角速度 ω の等速円運動を行っているから向心方向の運動方程式より

$$\begin{aligned} m'y\omega^2 &= F' \\ \therefore F' &= m' \times \frac{R\sqrt{M_\mathrm{A}^2+M_\mathrm{A}M_\mathrm{B}+M_\mathrm{B}^2}}{\cancel{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}} \times \frac{G(\cancel{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}})}{R^3} \\ &= \underbrace{\frac{Gm'\sqrt{M_\mathrm{A}^2+M_\mathrm{A}M_\mathrm{B}+M_\mathrm{B}^2}}{R^2}}_{(ク)} \end{aligned}$$

また，$\mathrm{L_4}$ から線分 AB に下した垂線の交点を H とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{CH} &= \frac{R}{2} - x \\ &= \frac{R}{2} - \frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R \\ &= \frac{M_\mathrm{A}-M_\mathrm{B}}{2(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}R \end{aligned}$$

また，

$$\mathrm{L_4H} = R\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

であるから，

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{\mathrm{L_4H}}{\mathrm{CH}} \\ &= \frac{\dfrac{\sqrt{3}}{2}R}{\dfrac{M_\mathrm{A}-M_\mathrm{B}}{2(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}R} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{3}(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}{M_\mathrm{A}-M_\mathrm{B}}}_{(ケ)} \end{aligned}$$