[II]

問 1 物体と台の間の動摩擦力の大きさを f，物体の加速度を a，台の加速度を A として運動方程式を立てると

$$\begin{cases} ma = -f \\ 5mA = f \end{cases}$$

これを足し合わせて

$$ma + 5mA = 0$$
$$\therefore A = -\frac{1}{5}a \quad \cdots (*)$$

$a < 0$ より，$A > 0$ であるから，台の加速度は水平右向きである．

問 2 時間 $\varDelta t$ の間の物体，台それぞれの速度の変化を $\varDelta v$，$\varDelta V$ とする．すると，加速度の定義から

$$a = \frac{\varDelta v}{\varDelta t}, \qquad A = \frac{\varDelta V}{\varDelta t}$$

これを $(*)$ に代入すると

$$\frac{\varDelta V}{\cancel{\varDelta t}} = -\frac{1}{5}\frac{\varDelta v}{\cancel{\varDelta t}}$$
$$\therefore \varDelta V = -\frac{1}{5}\varDelta v$$

物体が B に達したときの台の速度を V として，$\varDelta V = V - 0$，$\varDelta v = \dfrac{v_0}{2} - v_0$ を上式に代入して，V を求めると

$$V - 0 = -\frac{1}{5}\left(\frac{v_0}{2} - v_0\right)$$
$$\therefore V = \frac{v_0}{10}$$

問 3 動摩擦係数を μ とすると，動摩擦力の大きさは μmg．物体が A から B まで移動する間に床で静止した人から観測した変位を $\varDelta x$，台の変位を $\varDelta X$ とする．物体と台，それぞれのエネルギーと仕事の関係から

$$\begin{cases} \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2 - \dfrac{1}{2}mv_0^2 = -\mu mg\varDelta x & \cdots (2*) \\ \dfrac{1}{2} \times 5m \times \left(\dfrac{v_0}{10}\right)^2 - 0 = \mu mg\varDelta X & \cdots (3*) \end{cases}$$

$l = \mathit{\Delta} x - \mathit{\Delta} X$ である．(2∗) + (3∗) より

$$\frac{1}{2}m\left(\frac{v_0}{2}\right)^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 + \frac{1}{2}\times 5m \times \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 - 0 = -\mu mgl$$

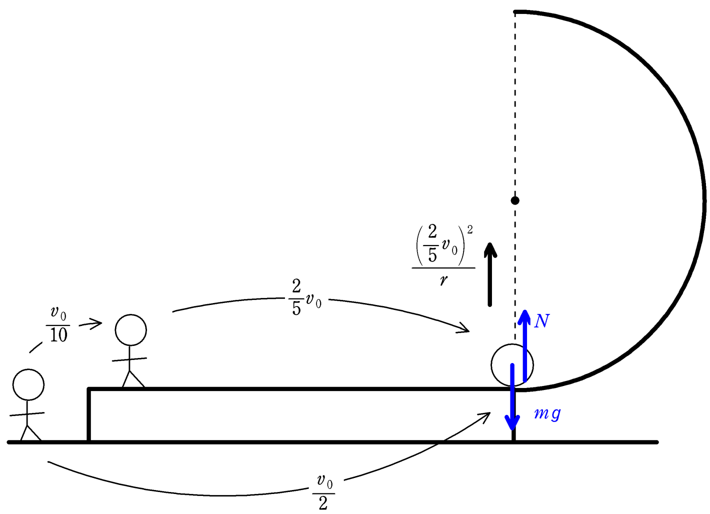
$$\therefore\ \mu = \frac{7v_0^2}{20gl}$$

問 4 (3∗) に，$\mu = \dfrac{7v_0^2}{20gl}$ を代入して

$$\frac{1}{2}\times 5m \times \left(\frac{v_0}{10}\right)^2 = \frac{7v_0^2}{20gl}\times mg\mathit{\Delta} X$$

$$\therefore\ \mathit{\Delta} X = \frac{l}{14}$$

問 5 物体が B を通過した直後の台に対する物体の速度は $\dfrac{2}{5}v_0$ である．



垂直抗力の大きさを N として，台からみた物体の向心方向の運動方程式を立てる．

$$m\frac{\left(\dfrac{2}{5}v_0\right)^2}{r} = N - mg$$

$$\therefore\ N = mg + \frac{4mv_0^2}{25r}$$

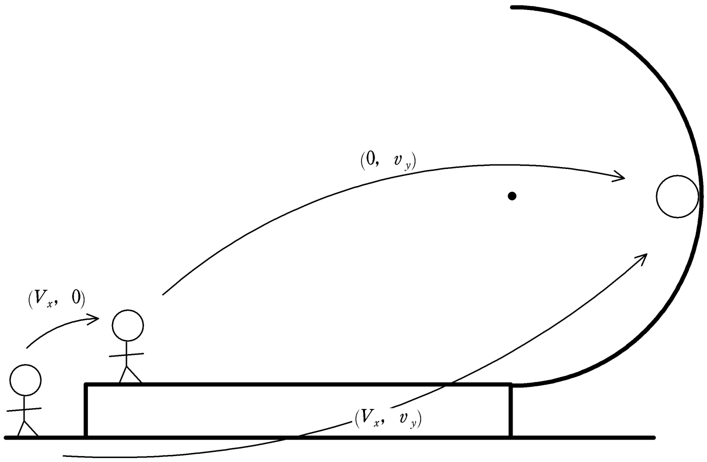
問 6 鉛直上方向に y 軸をとる．物体が C に達したとき，台からみた物体の速度の x 成分は 0 である．そこで，台からみた物体の速度を $(0,\ v_y)$ とする．また，このときの床で静止した人からみた台の速度を $(V_x,\ 0)$ とすると，床で静止した人からみた物体の速度は $(V_x,\ v_y)$ である．水平方向の運動量保存則[*1]と，B と C の間での力学的エネルギー保存則より

$$\begin{cases} mv_0 = mV_x + 5mV_x & \cdots(4*) \\ \dfrac{1}{2}mv_0^2 + \dfrac{1}{2}\times 5m\times\left(\dfrac{v_0}{10}\right)^2 = \dfrac{1}{2}m\left(V_x^2 + v_y^2\right) + \dfrac{1}{2}\times 5m \times V_x^2 + mgr & \cdots(5*) \end{cases}$$

[*1] 運動量は物体が A にいたときから成立．

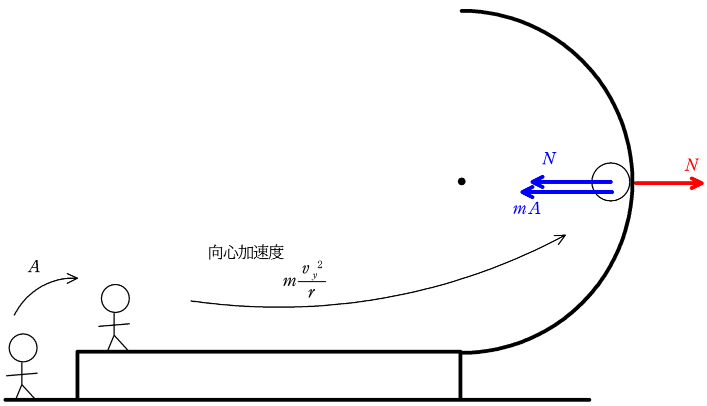
(4∗) より

$$V_x = \underset{\sim\sim}{\frac{v_0}{6}}$$



問 7 $V_x = \frac{v_0}{6}$ を (5∗) に代入して v_y を求めると

$$v_y = \sqrt{\frac{2}{15}v_0^2 - 2gr}$$



また，垂直抗力の大きさを N，床で静止した人からみた台の水平加速度を A として，台からみた物体の向心方向の運動方程式と床からみた台の水平方向の運動方程式を立てる．台からみた物体の向心方向の運動方程式を立てる際，慣性力を忘れないように注意する．

$$\begin{cases} m\frac{v_y^2}{r} = N + mA \\ 5mA = N \end{cases}$$

$v_y = \sqrt{\frac{2}{15}v_0^2 - 2gr}$ を代入し，これを解いて，

$$N = \underset{\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim\sim}{\frac{mv_0^2}{9r} - \frac{5}{3}mg}$$

問 8 D において，垂直抗力が 0 であることから，台に対する物体の向心方向の運動方程式[*2]は，台からみた物体の速度を u として

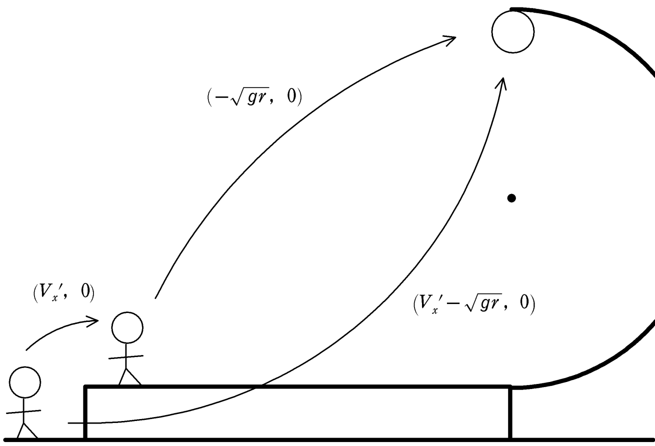
$$m\frac{u^2}{r} = mg$$

$u < 0$ であることから

$$u = -\sqrt{gr}$$

問 9 また，このときの台の速度を V_x' として，運動量保存則[*3]と力学的エネルギー保存則を立てると

$$\begin{cases} mv_0 = m(V_x' - \sqrt{gr}) + 5mV_x' & \cdots(6*) \\ \dfrac{1}{2}m\left(\dfrac{v_0}{2}\right)^2 + \dfrac{1}{2}\times 5m \times \left(\dfrac{v_0}{10}\right)^2 = \dfrac{1}{2}m(V_x' - \sqrt{gr})^2 + mg\times 2r + \dfrac{1}{2}\times 5m\times V_x'^2 & \cdots(7*) \end{cases}$$



(6∗) より $V_x' = \dfrac{v_0 + \sqrt{gr}}{6}$ から，これを (7∗) に代入し，v_0 を求める[*4]と

$$v_0 = \frac{\sqrt{145gr}}{2}$$

問 10 D を通過後は，台からみて水平左方向に大きさ $\sqrt{gr}$ の初速で水平投射運動[*5]をする．物体が台にぶつかるまでの時間を t_0 とする．鉛直方向の等加速度運動の変位の式より

$$2r = 0\times t_0 + \frac{1}{2}gt_0^2$$
$$\therefore t_0 = \sqrt{\frac{4r}{g}}$$

[*2] このときは台の水平方向の力が 0 なので慣性力も 0

[*3] 床からみた速度を用いる．床からみた物体の速度は $V_x' = -\sqrt{gr}$

[*4] ここの計算はやや量が多い．

[*5] このときも台の水平方向の力は 0 なので慣性力も 0.

問題の条件より，台からみた物体は，時間 t_0 の間に，水平方向に $l - \dfrac{9}{10}l = \dfrac{l}{10}$ だけ移動しているから，

$$\frac{l}{10} = \sqrt{gr} \times \sqrt{\frac{4r}{g}}$$
$$\therefore\ r = \frac{l}{20} \quad \cdots (8*)$$

問 3 で得た，$\mu = \dfrac{7v_0^2}{20gl}$ に，問 9 で得た $v_0 = \dfrac{\sqrt{145gr}}{2}$ を代入し，さらに，(8∗) も代入すると

$$\begin{aligned}\mu &= \frac{7}{20gl} \times \frac{145gr}{4} \\ &= \frac{203}{16l} \times \frac{l}{20} \\ &= \underset{\sim\sim\sim}{\frac{203}{320}}\end{aligned}$$