2

(A) (a) $r \leqq R$ の場合，半径 r の球内にある正電荷は $e \times \dfrac{r^3}{R^3}$[*1]であるから，荷電粒子にはたらく静電気力の大きさは

$$\begin{aligned} F &= k\frac{|-e|}{r^2} \times e \times \frac{r^3}{R^3} \\ &= \underbrace{\frac{ke^2}{R^3}}_{(ア)} r \end{aligned}$$

弾性力による位置エネルギーと比較して

$$\begin{aligned} U &= \frac{1}{2}Kr^2 \\ &= \underbrace{\frac{ke^2}{2R^3}}_{(イ)} r^2 \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

$r \geqq R$ の場合，静電気力の大きさ F は

$$F = \underbrace{ke^2}_{(ウ)} \frac{1}{r^2}$$

無限遠が基準の場合の位置エネルギーは $k\dfrac{e \times (-e)}{r}$ であるから，原点を基準にした場合の荷電粒子の位置エネルギーは定数 C を用いて

$$U = \underbrace{-ke^2}_{(エ)} \times \frac{1}{r} + C \quad \cdots (2*)$$

$(*)$，$(2*)$ より，$r = R$ のとき位置エネルギーが一致することから

$$\begin{aligned} -k\frac{e^2}{R} + C &= \frac{ke^2}{2R} \\ C &= \underbrace{\frac{3ke^2}{2R}}_{(オ)} \end{aligned}$$

これより，$r \geqq R$ では

$$U = -\frac{ke^2}{r} + \frac{3ke^2}{2R}$$

[*1] 単位体積あたりの正電荷を ρ とすると，半径 R の正電荷は

$$e = \rho \times \frac{4}{3}\pi R^3$$

である．半径 r 内の電荷を Q とすると，上式を用いて

$$\begin{aligned} Q &= \rho \times \frac{4}{3}\pi r^3 \\ &= e \times \frac{r^3}{R^3} \end{aligned}$$

であり，$r \to \infty$ で，$U \to \dfrac{3ke^2}{2R}$ である．原点における位置エネルギーと無限遠の位置エネルギーの差は $\dfrac{3ke^2}{2R}$ であり，これが求める仕事に等しい．したがって

$$W = \underbrace{\frac{3ke^2}{2R}}_{(カ)}$$

(b) $(r_0,\ 0)$ にある荷電粒子に着目する．この荷電粒子と正電荷の間にはたらく力は x 軸負の向きでその大きさは

$$k\frac{|-e|}{r_0^2} \times 3e \times \frac{r_0^3}{R^3} = \frac{3ke^2 r_0}{R^3}$$

また，$(r_0,\ 0)$ にある荷電粒子以外の荷電粒子から受ける力は x 軸の正の向きで，その大きさ[*2]は

$$\frac{ke^2}{(\sqrt{3}r_0)^2} \times \cos 30^\circ \times 2 = \frac{\sqrt{3}ke^2}{3r_0^2}$$

以上から，つり合いの式より

$$\frac{3ke^2 r_0}{R^3} = \frac{\sqrt{3}ke^2}{3r_0^2}$$
$$\therefore\ r_0 = \frac{R}{\sqrt{3}}$$

(B) (c) 荷電粒子には，大きさ Ka の静電気力と大きさ $(a\omega) \times Be$ のローレンツ力が O に向かってはたらく．向心方向の運動方程式を立て，$\omega > 0$ であることを考慮すると

$$ma\omega^2 = Ka + eaB\omega$$
$$\therefore\ \omega = \frac{eB + \sqrt{e^2B^2 + 4mK}}{2m}$$

(d) 負電荷が反時計回りにまわっているので電流は時計回り，つまり負である．荷電粒子が 1 周まわるのにかかる時間は $\dfrac{2\pi}{\omega}$ であるから，求める電流は

$$I = -\frac{|-e|}{\frac{2\pi}{\omega}}$$
$$= -\frac{e\omega}{2\pi}$$

(e) 右ねじの法則より，荷電粒子が回転することで生じる電流 I が原点につくる磁場の向きは z 軸の負の向きである．したがって

$$H_z = -\frac{|I|}{2a}$$
$$= -\frac{ew}{4\pi a}$$

[*2] 荷電粒子間の距離は $2r_0 \cos 60^\circ = \sqrt{3}r_0$

(C) (f) 一様電場の強さを E_0 とする．この電場中において，$-e$ の荷電粒子を原点から $x\,(\geqq 0)$ までもっていく際にする仕事は

$$|-e|E_0 \times |x| = eE_0x$$

であり，これが，$x \geqq 0$ における一様電場における位置エネルギーである．
また，$-e$ の荷電粒子を原点から $x\,(\leqq 0)$ までもっていく際にする仕事は

$$-|-e|E_0 \times |x| = +eE_0x$$

である．これが，$x \leqq 0$ における一様電場における位置エネルギーである．以上より，一様電場による位置 x の位置エネルギーは，eE_0x である．
この結果と (a) の結果も考慮して，
$x \leqq -R$，$-R \leqq x \leqq 0$，$0 \leqq x \leqq R$，$R \leqq x$ それぞれの位置 x における位置エネルギーを U_1，U_2，U_3，U_4 として，

$$\begin{aligned}
U_1 &= -\frac{ke^2}{|x|} + \frac{3ke^2}{2R} + eE_0x = \frac{ke^2}{x} + eE_0x + \frac{3ke^2}{2R} \\
U_2 &= \frac{ke^2}{2R^3}|x|^2 + eE_0x = \frac{ke^2}{2R^3}x^2 + eE_0x \\
U_3 &= \frac{ke^2}{2R^3}|x|^2 + eE_0x = \frac{ke^2}{2R^3}x^2 + eE_0x \\
U_4 &= -\frac{ke^2}{|x|} + \frac{3ke^2}{2R} + eE_0x = -\frac{ke^2}{x} + eE_0x + \frac{3ke^2}{2R}
\end{aligned}$$

$-R \leqq x \leqq R$ の領域において，縦軸が U'，横軸を x としたグラフの頂点は

$$U' = \frac{ke^2}{2R^3}x^2 + eE_0x$$

を両辺 x で微分して

$$\frac{dU'}{dx} = \frac{ke^2}{R^3}x + eE_0$$

であり，$\dfrac{dU'}{dx} = 0$ となる x は

$$\frac{ke^2}{R^3}x + eE_0 = 0$$

$$\therefore\ x = -\frac{E_0R^3}{ke} < 0$$

であり，頂点の x 座標は負である．この時点で ④，⑥，⑧，⑩ にしぼられる．また，$x \leqq -R$ において，$x \to \infty$ で，$U_1 \to -\infty$ であるるから，④ は不適．さらに，原点での位置エネルギーは 0 であり，$x \leqq 0$ のすべての x について，原点よりも位置エネルギーが小さいと無限遠に達してしまうので，⑩ は不適．また，荷電粒子は，$x \leqq -R$ の領域にも到達する．⑥ だと，$x = -R$ において，$U' > 0$ なので，到達することができない．以上のことを踏まえて ⑧.

(g) 条件を満たすのは，$x=-R$ において，$U' \leqq 0$ である．したがって，U_2 の式より

$$\frac{ke^2}{2R^3}R^2 + eE_0 \times (-R) \leqq 0$$
$$\therefore\ E_0 \geqq \frac{ke}{2R^2}$$

したがって，条件を満たす電場の下限は，

$$E_1 = \frac{ke}{2R^2}$$

(h) 条件を満たすのは，$x \leqq -R$ における U'の最大値 $\geqq 0$ である．そこで，$x=-X\,(X>0)$[*3]における U' は，U_1 の式より

$$U' = -\left(\frac{ke^2}{X} + eE_0X\right) + \frac{3ke^2}{2R}$$

$X>0$ であるから，相加相乗平均の不等式より

$$\frac{ke^2}{X} + eE_0X \geqq 2\sqrt{\frac{ke^2}{X} \times eE_0X} = 2\sqrt{e^3E_0k}$$

したがって，

$$U' \leqq -2\sqrt{e^3E_0k} + \frac{3ke^2}{2R}$$

であり，$\dfrac{ke^2}{X} = eE_0X$ を満たす X で U' は最大値 $-2\sqrt{e^3E_0k} + \dfrac{3ke^2}{2R}$ をとる．これが 0 以上であることから

$$-2\sqrt{e^3E_0k} + \frac{3ke^2}{2R} \geqq 0$$
$$\therefore\ E_0 \leqq \frac{9ke}{16R^2}$$

したがって，求める上限は

$$E_2 = \frac{9ke}{16R^2}$$

[*3] 相加相乗平均の不等式が使いやすいように文字の置き換えをした．