2022 年

I

問 1 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgh \qquad \therefore \quad v_0 = \boldsymbol{\sqrt{2gh}}$$

問 2 A 点に達する直前における向心方向の運動方程式より

$$m\frac{v_0^2}{h} = S - mg \qquad \therefore \quad S = \frac{mv_0^2}{h} + mg$$

問 1 より $v_0 = \sqrt{2gh}$ であるから

$$\therefore \quad S = \frac{m \times 2gh}{h} + mg = \boldsymbol{3mg}$$

問 3 物体と台車にはたらく水平方向の力の和は常に 0 であるから，運動量が保存する．ばねが最も縮んだとき，物体と台車の速度は等しいので，運動量保存則より

$$m\sqrt{2gh} = (M+m)V_1 \qquad \therefore \quad V_1 = \boldsymbol{\frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}}$$

問 4 力学的エネルギー保存則より[*1]

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V_1^2 + \frac{1}{2}kX^2$$

$v_0 = \sqrt{2gh}$, $V_1 = \dfrac{m}{M+m}\sqrt{2gh}$ を代入して

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}kX^2 &= \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 - \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}\right)^2 \\ &= mgh - \frac{m^2gh}{M+m} = \frac{Mmgh}{M+m} \\ \therefore \quad X &= \boldsymbol{\sqrt{\frac{2Mmgh}{k(M+m)}}}\end{aligned}$$

[*1] 物体が高さ h の場所にあるところとばねが最も縮んだところで力学的エネルギー保存則を立ててもよい．

問 5 物体と台車がばねを介して相互に力を及ぼしているとき，力学的エネルギーが保存しているので，弾性衝突とみなすことができる．台車の床に対する速度を V_2 として，運動量保存則と反発係数の式より

$$\begin{cases} m\sqrt{2gh} = mv_2 + MV_2 & \cdots(*) \\ 1 = -\dfrac{v_2 - V_2}{\sqrt{2gh} - 0} & \cdots(2*) \end{cases}$$

(2*) より，$V_2 = v_2 + \sqrt{2gh}$．これを (*) に代入して v_2 を求める．

$$m\sqrt{2gh} = mv_2 + M(v_2 + \sqrt{2gh})$$
$$(M+m)v_2 = (m-M)\sqrt{2gh} \qquad \therefore \quad v_2 = \boldsymbol{\frac{m-M}{M+m}\sqrt{2gh}}$$

問 6 摩擦力がはたらいても物体と台車の間にはたらく力の和が 0 であるから，運動量が保存する．物体が台車上で静止したとき，物体と台車の速度を V_3 とする．[*2]運動量保存則より

$$m\sqrt{2gh} = (M+m)V_3 \qquad \therefore \quad V_3 = \frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}$$

また，物体と台車について力学的エネルギー変化と非保存力がした仕事の関係より

$$\frac{1}{2}(M+m)V_3^2 - \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 = -\mu mgL$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}(M+m)\left(\frac{m}{M+m}\sqrt{2gh}\right)^2 - \frac{1}{2}m(\sqrt{2gh})^2 = -\mu mgL$$
$$\therefore \quad L = \boldsymbol{\frac{M}{\mu(M+m)}h}$$

[*2] 台車からみた物体の速度が 0 なので，

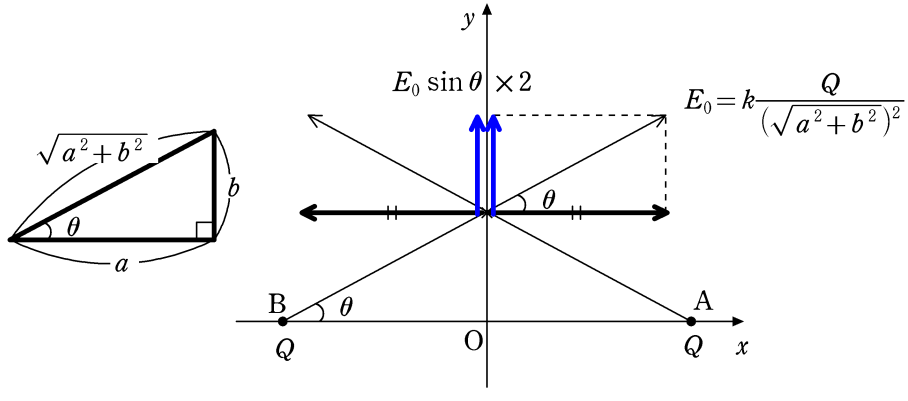
床からみた物体の速度 ＝ 床からみた台車の速度 ＋ 0

∴　床からみた物体の速度 ＝ 床からみた台車の速度

が成り立つ．

II

問 1 点 A，B にである電荷 Q が C の位置につくる電場のうち x 成分は互いに反対方向へ向き打ち消す.

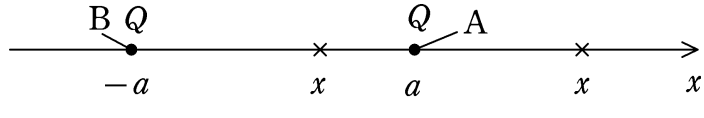


たとえば，B にある電荷が C の位置につくる電場の大きさは $E_0 = k\dfrac{Q}{\sqrt{a^2+b^2}} = \dfrac{kQ}{a^2+b^2}$ であり，上図の角度 θ を用いて，その y 成分は，$E_0 \sin\theta$ であるから，A にある電荷がつくる電場も足し合わせて，電場の大きさは

$$E_0 \sin\theta \times 2 = \frac{kQ}{a^2+b^2} \times \frac{b}{\sqrt{a^2+b^2}} \times 2 = \boldsymbol{\frac{2kQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}}$$

問 2　(i) $|x| < a$ のとき，A からの距離は $a - x$，b からの距離は $x - (-a) = x + a$ であるから，

$$V(x) = k\frac{Q}{a-x} + k\frac{Q}{x+a} = \frac{2kQa}{a^2-x^2}$$



(ii) $a < |x|$ のとき, 特に $a < x$ のとき, A からの距離は $x - a$, B からの距離は $x - (-a) = x + a$ であるから

$$V(x) = k\frac{Q}{x-a} + k\frac{Q}{x+a} = \frac{2kQx}{x^2-a^2}$$

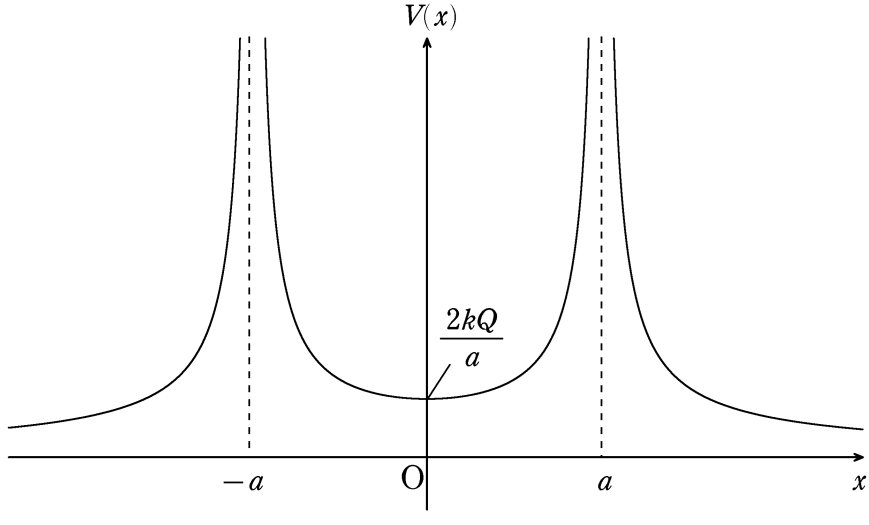
また，$x < a$ のとき，A からの距離は $a - x$，B からの距離は $-a - x = -(a + x)$ であるから

$$V(x) = k\frac{Q}{a-x} + k\frac{Q}{-(a+x)} = \frac{2kQ\cdot(-x)}{x^2-a^2}$$

以上から，

$$V(x)=\begin{cases}\dfrac{\boldsymbol{2kQa}}{\boldsymbol{a^2-x^2}} & (\boldsymbol{|x|<a})\\ \dfrac{\boldsymbol{2kQ|x|}}{\boldsymbol{x^2-a^2}} & (\boldsymbol{a<|x|})\end{cases}$$

$|x|<a$，$a<|x|$ どちらについても偶関数になっており，縦軸について対称であることと，$x\to\pm\infty$ で $V(x)\to 0$ であること，$V(x)>0$ であること，$x\to\pm a$ で $V(x)\to\pm\infty$ を考慮してグラフをかくと次のようになる．



問 3 点 C における電場は問 1 より，y 軸の正方向に $\dfrac{2kQb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}$ なので，質点 P がうける静電気力の向きは **y 軸正方向** で大きさは $\boldsymbol{\dfrac{2kQqb}{(a^2+b^2)^{\frac{3}{2}}}}$

問 4 $b=\dfrac{3}{4}a$ のとき，AC 間，BC 間の距離はともに $\dfrac{5}{4}a$ であるから，A にある電荷と質点 P の間の位置エネルギーと B にある電荷と質点 P の間の位置エネルギーの和 U_{C} は

$$U_{\mathrm{C}}=k\frac{Qq}{\frac{5}{4}a}\times 2=\frac{8kQq}{5a}$$

また，AD 間の距離は $\dfrac{4}{3}a$，BD 間の距離は $\dfrac{2}{3}a$ であるから，A にある電荷と質点 P の間の位置エネルギーと B にある電荷と質点 P の間の位置エネルギーの和 U_{D} は

$$U_{\mathrm{D}}=k\frac{Qq}{\frac{4}{3}a}+k\frac{Qq}{\frac{2}{3}a}=\frac{9kQq}{4a}$$

点 C から点 D へ移動する間の位置エネルギー変化は外力がした仕事に等しいので，その仕事 W は

$$W=U_{\mathrm{D}}-U_{\mathrm{C}}=\frac{9kQq}{4a}-\frac{8kQq}{5a}=\boldsymbol{\frac{13kQq}{20a}}$$

問 5 O における点 A の電荷と質点 P および点 B の電荷と質点 P の位置エネルギーの和 U_{O} は

$$U_{\mathrm{O}} = k\frac{Q}{a} + k\frac{Q}{a} = \frac{2kQ}{a}$$

O における速さを v として，力学的エネルギー保存則より

$$U_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}mv^2 + U_{\mathrm{O}}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}mv^2 = \frac{9kQq}{4a} - \frac{2kQq}{a} = \frac{kQq}{4a}$$
$$\therefore \quad v = \sqrt{\boldsymbol{\frac{kQq}{2ma}}}$$

問 6 A にあった電荷を E にうつすと，EB の中点である $\mathrm{F}\left(\boldsymbol{-\frac{1}{6}a,\ 0}\right)$ にて位置エネルギーが最小になり，質点 P の速さが最大となる.[*3] この場所の位置エネルギー U_{F} は，EF 間，BE 間の距離がともに $\frac{5}{6}a$ であることから

$$U_{\mathrm{F}} = k\frac{Qq}{\frac{5}{6}a} \times 2 = \frac{12kQq}{5a}$$

また，D における位置エネルギー U'_{D} は，ED 間の距離が a，BD 間の距離が $\frac{2}{3}a$ なので

$$U'_{\mathrm{D}} = k\frac{Qq}{a} + k\frac{Qq}{\frac{2}{3}a} = \frac{5kQq}{2a}$$

F における速さを V として，力学的エネルギー保存則より

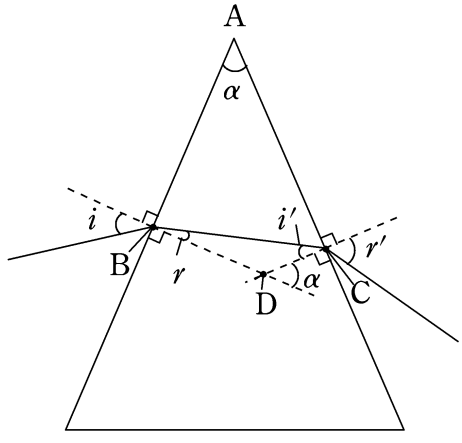
$$U'_{\mathrm{D}} = \frac{1}{2}mV^2 + U_{\mathrm{F}}$$
$$\therefore \quad \frac{1}{2}mV^2 = \frac{5kQq}{2a} - \frac{12kQq}{5a} = \frac{kQq}{10a}$$
$$\therefore \quad V = \sqrt{\boldsymbol{\frac{kQq}{5ma}}}$$

[*3] E と B にある電荷がともに Q なので，問 2 のグラフと似た形になるのはわかるはず.

III

問 1 屈折の法則より

$$n_0 \sin i = n_1 \sin r \qquad \therefore \quad \frac{n_1}{n_0} = \boldsymbol{\frac{\sin i}{\sin r}}$$



問 2 図のように，点 B, C, D をとると，∠ABD ＝ ∠ACD ＝ 90° だから，点 A, B, C, D は同一円周上にある．すると，円に内接する四角形の対角の和は 180° なので，△BDC について，∠D の外角は α である．外角と隣り合わない内角の和の関係より

$$\alpha = r + i' \qquad \therefore \quad i' = \boldsymbol{\alpha - r}$$

問 3 図において，$i = i_1$，$r' = i_1$ としたときの，B 点と C 点における屈折の法則より

$$n_0 \sin i_1 = n_1 \sin r \quad \cdots(*), \qquad n_1 \sin i' = n_0 \sin i_1 \quad \cdots(2*)$$

$(*)$, $(2*)$ より，$n_0 \sin i_1$ を消去して

$$n_1 \sin r = n_1 \sin i' \qquad \therefore \quad i' = r \quad \cdots(3*)$$

一方，問 2 より，$i' = \alpha - r$ であり，これに $(3*)$ を代入し i' を消去すると

$$r = \alpha - r \qquad \therefore \quad r = \frac{\alpha}{2}$$

これを $(*)$ に代入して

$$n_0 \sin i_1 = n_1 \sin \frac{\alpha}{2} \qquad \therefore \quad \frac{n_1}{n_0} = \boldsymbol{\frac{\sin i_1}{\sin \frac{\alpha}{2}}}$$

問 4 波長 λ_2 の方の屈折率の方が大きいと書かれているので，λ_2 の方の光の方がよく曲がる．したがって，**(b)**

問 5 $i' = \theta_C$ のとき，$r' = 90°$ とする．[*4]このとき，C における屈折の法則より

$$n_1 \sin \theta_C = n_0 \sin 90° \qquad \therefore \quad \sin \theta_C = \frac{n_0}{n_1} \quad \cdots(4*)$$

全反射を起こすための条件は $\theta_C < i'$ である．角度が 0° より大きく 90° より小さい範囲においては角度の増加とともにその sin の値も大きくなるので，$\sin \theta_C < \sin i'$ である．$(4*)$ を代入

[*4] つまり，θ_C は臨界角．

して $\sin\theta_{\mathrm{C}}$ を消去すると

$$\boldsymbol{\frac{n_0}{n_1} < \sin i'}$$

問 6 文脈から $i = i_3$ で入射したとき，$i' = \theta_{\mathrm{C}}$ であることがわかる．このとき，問 2 で得た関係式 $i' = \alpha - r$ に $i' = \theta_{\mathrm{C}}$ を代入して

$$\theta_{\mathrm{C}} = \alpha - r \qquad \therefore \quad r = \alpha - \theta_{\mathrm{C}} \quad \cdots(5*)$$

であり，$n_0 = 1$ という条件から，$\sin\theta_{\mathrm{C}} = \dfrac{1}{n_1}$．三角関数の相互関係より，$\cos\theta_{\mathrm{C}} = \dfrac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1}$ である．(5*) の両辺に sin をとり，右辺については加法定理で展開すると

$$\begin{aligned}\sin r &= \sin(\alpha - \theta_{\mathrm{C}}) \\ &= \sin\alpha\cos\theta_{\mathrm{C}} - \cos\alpha\sin\theta_{\mathrm{C}} \\ &= \sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{n_1} \quad \cdots(6*)\end{aligned}$$

また，B における屈折の法則より

$$1 \times \sin i_3 = n_1 \times \sin r$$

(6*) を代入して

$$\begin{aligned}\sin i_3 &= n_1\left(\sin\alpha \cdot \frac{\sqrt{n_1^2 - 1}}{n_1} - \cos\alpha \cdot \frac{1}{n_1}\right) \\ &= \boldsymbol{\sqrt{n_1^2 - 1}\sin\alpha - \cos\alpha}\end{aligned}$$