[I]

問 1 図 I−1 の右方向を上方向をそれぞれ x 軸, y 軸の正の向きとして, 物体 A の初速度は $(v_{\mathrm{A}}\cos\alpha$ $, v_{\mathrm{A}}\sin\alpha)$ で，加速度が $(0, -g)$ なので，A を投げ出したときの時刻を $t=0$ として，時刻 t の物体 A の速度は

$$(v_{\mathrm{A}}\cos\alpha,\ v_{\mathrm{A}}\sin\alpha-gt)$$

である．一方，時刻 t における物体 B の速度は

$$(0,\ -gt)$$

である．B からみた A の速度が

$$(v_{\mathrm{A}}\cos\alpha,\ v_{\mathrm{A}}\sin\alpha-gt)-(0,\ -gt)=(v_{\mathrm{A}}\cos\alpha,\ v_{\mathrm{A}}\sin\alpha)$$

で，時刻によらず速度の大きさ，向きが一定なので，A が投げ出された時点で物体 A の速度が物体 B に向いている必要がある．したがって，

$$\tan\alpha=\boldsymbol{\frac{h}{l_{\mathrm{B}}}}$$

問 2 時刻 t における A と B の座標は物体 A の $t=0$ の位置を原点とすると

$$\mathrm{A}\left(v_{\mathrm{A}}t\cos\alpha,\ v_{\mathrm{B}}t\sin\alpha-\frac{1}{2}gt^2\right),\qquad \mathrm{B}\left(l_{\mathrm{B}},\ h-\frac{1}{2}gt^2\right)$$

B の y 座標が $\dfrac{h}{2}$ になる時刻で A の x 座標が l_{B} となる条件より

$$\begin{cases} h-\dfrac{1}{2}gt^2=\dfrac{h}{2} \\ v_{\mathrm{A}}t\cos\alpha=l_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

t を消去して，$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ を用い，問 1 の結果である $\tan\alpha$ を用いると

$$v_{\mathrm{A}}^2=\frac{gl_{\mathrm{B}}^2}{h\cos^2\alpha}=\frac{gl_{\mathrm{B}}^2}{h}(\tan^2\alpha+1)=\frac{h^2+l_{\mathrm{B}}^2}{h}g$$

したがって，$v_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{\sqrt{\dfrac{h^2+l_{\mathrm{B}}^2}{h}g}}$

問 3 B の y 座標が 0 になる時刻で A の x 座標が l_{B} になる条件より

$$\begin{cases} h-\dfrac{1}{2}gt^2=0 \\ v_{\mathrm{A}}t\cos\alpha=l_{\mathrm{B}} \end{cases}$$

問 2 と同様に t を消去して，$\tan^2\alpha+1=\dfrac{1}{\cos^2\alpha}$ を用い，問 1 の結果である $\tan\alpha$ を用いると，

$$v_{\mathrm{A}}=\boldsymbol{\sqrt{\frac{h^2+l_{\mathrm{B}}^2}{2h}g}}$$

問 4 C を投げ出した位置を原点にとり，図 I-2 の右方向を x 軸，上方向を y 軸にとる．角度 θ で投げ上げたときの時刻 t での物体の速度は $(v_{\mathrm{C}}\cos\theta,\ v_{\mathrm{C}}\sin\theta - gt)$，座標は $\left(v_{\mathrm{C}}t\cos\theta,\ v_{\mathrm{C}}t\sin\theta - \frac{1}{2}gt^2\right)$ である．最高点に達するとき，y 方向の速度が 0 になるのでこのときの時刻は

$$v_{\mathrm{C}}\sin\theta - gt = 0 \qquad \therefore \quad t = \frac{v_{\mathrm{C}}\sin\theta}{g}$$

対称性から，投げ出してから最高点に達する時間と最高点から再び投げ出した場所と同じ高さにかえってくるまでの時間は同じなので，物体 C が着地する時刻は $\frac{2v_{\mathrm{C}}\sin\theta}{g}$．このときの x 座標は

$$x = v_{\mathrm{C}}\cos\theta \times \frac{2v_{\mathrm{C}}\sin\theta}{g} = \frac{v_{\mathrm{C}}^2\sin 2\theta}{g}$$

であり，x が最大になるのは $\sin 2\theta = 1$ のとき，つまり，$\theta = \frac{\pi}{4}$ のときである．つまり，$\beta = \frac{\pi}{4}$．このとき，発射点と発射着地点の距離は

$$l_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{\frac{v_{\mathrm{C}}^2}{g}}$$

問 5 仰角 β が発射台からみた角度であるとして解答する．水平速度 v_x をもった装置に C がのっているとき，x 方向の初速度は $v_{\mathrm{C}}\cos\frac{\pi}{4} + v_x$ になり，y 方向の初速度は変化しない．y 方向の初速度が変化しないので，発射してから着地するまでの時間は

$$2t = \frac{2v_{\mathrm{C}}}{g} \times \sin\frac{\pi}{4} = \frac{\sqrt{2}v_{\mathrm{C}}}{g}$$

である．したがって，l_x は

$$l_x = \left(\frac{v_{\mathrm{C}}}{\sqrt{2}} + v_x\right) \times \frac{\sqrt{2}v_{\mathrm{C}}}{g} \quad \cdots(*)$$

一方，C が鉛直速度 v_y をもった装置にのっているとき，y 方向の初速度が $v_{\mathrm{C}}\sin\frac{\pi}{4} + v_y$ となる．発射してから，最高点に達するまでの時間は，鉛直方向の等加速度運動の速度の式より

$$0 = v_{\mathrm{C}}\cos\frac{\pi}{4} + v_y - gt \qquad \therefore \quad t = \frac{1}{g}\left(\frac{v_{\mathrm{C}}}{\sqrt{2}} + v_y\right)$$

であり，対称性を用いて，発射してから着地するまでの時間は $\frac{2}{g}\left(\frac{v_{\mathrm{C}}}{\sqrt{2}} + v_y\right)$
したがって，l_y は

$$\begin{aligned} l_y &= v_C\cos\frac{\pi}{4} \times \frac{2}{g}\left(\frac{v_{\mathrm{C}}}{\sqrt{2}} + v_y\right) \\ &= \left(\frac{v_{\mathrm{C}}}{\sqrt{2}} + v_y\right) \times \frac{\sqrt{2}v_{\mathrm{C}}}{g} \quad \cdots(2*) \end{aligned}$$

(∗) と (2∗) と $l_x = \dfrac{1}{2}l_y$ の関係より

$$\left(\frac{v_\mathrm{C}}{\sqrt{2}} + v_x\right)\times\frac{\sqrt{2}v_\mathrm{C}}{g} = \frac{1}{2}\times\left(\frac{v_\mathrm{C}}{\sqrt{2}} + v_y\right)\times\frac{\sqrt{2}v_\mathrm{C}}{g}$$

$$\therefore\quad v_y = \boldsymbol{\frac{v_\mathrm{C}}{\sqrt{2}} + 2v_x}$$

問 6 重力加速度の大きさを g，地球の半径を R，地球の質量を M，物体の質量を m，第一宇宙速度を v_1 とする．向心方向の運動方程式より

$$m\frac{v_1^2}{R} = mg \qquad\qquad \therefore\quad v_1 = \sqrt{gR}$$

$g = 9.8\,\mathrm{m/s^2}$，$R = 6.4\times10^6\,\mathrm{m}$ を代入して

$$\begin{aligned} v_1 &= \sqrt{9.8\times6.4\times10^6} \\ &= \sqrt{7^2\times2\times8^2\times10^4} = 56\times10^2\sqrt{2} \end{aligned}$$

$\sqrt{2} = 1.41$ として

$$\fallingdotseq 7.9\times10^3\ \mathrm{m/s}$$

1s あたり 7.9 km 進むので，1 分 あたり $60\times7.9 = 474$ km 進む．したがって，分速 474 km で最も近いものは **(う)**

問 7 赤道上の地点は 1 日で $2\times\pi\times6400$ km 分回転するので，その速さ v_2 は，$\pi = 3.1$ として

$$v_2 = \frac{2\times3.1\times6.4\times10^6}{24\times60\times60} \fallingdotseq 4.6\times10^2\,\mathrm{m/s}$$

第一宇宙速度は問 6 より，$v_1 = 7.9\times10^3$ なので

$$\frac{v_2}{v_1}\times100 = \frac{4.6\times10^2}{7.9\times10^3}\times100 \fallingdotseq 5.8\,\%$$

最も近いのは **(い)**

問 8 地球の自転の角速度は $\omega_\mathrm{e} = \dfrac{2\pi}{24\text{時間}}$，火星の角速度は，$\omega_\mathrm{m} = \dfrac{2\pi}{24\text{時間}}$ より，$\omega_\mathrm{e} = \omega_\mathrm{m}$ である．万有引力定数を G として，地球での静止衛星[*1]（質量を m とする）の向心方向の運動方程式と，火星での静止衛星の向心方向の運動方程式はそれぞれ，

$$\begin{cases} m(r_\mathrm{e} + R_\mathrm{e})\omega_e^2 = G\dfrac{M_\mathrm{e}m}{r_\mathrm{e}^2} \\ m(r_\mathrm{m} + R_\mathrm{m})\omega_m^2 = G\dfrac{M_\mathrm{m}m}{r_\mathrm{m}^2} \end{cases}$$

$\omega_\mathrm{e} = \omega_\mathrm{m}$ を用い，辺々を割って整理すると

$$\left(\frac{r_\mathrm{m} + R_\mathrm{m}}{r_\mathrm{e} + R_\mathrm{e}}\right)^3 = \frac{M_\mathrm{m}}{M_\mathrm{e}} \qquad\qquad \therefore\quad r_\mathrm{m} = \boldsymbol{\left(\frac{M_\mathrm{m}}{M_\mathrm{e}}\right)^{\frac{1}{3}}(r_\mathrm{e} + R_\mathrm{e}) - R_\mathrm{m}}$$

[*1] 静止衛星は地球からみて静止しているように見える衛星のこと．つまり，地球の角速度と同じ円運動をしている．火星も同様.

問 9 加速度を a_{m} として運動方程式を立てると

$$m_{\mathrm{s}}a_{\mathrm{m}} = m_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{m}} - kv \qquad \therefore \quad a_{\mathrm{m}} = \boldsymbol{g_{\mathrm{m}} - \frac{k}{m_{\mathrm{s}}}v}$$

問 10 地球では速さ v での空気抵抗の大きさは $2kv \times 200 = 400kv$ となる．一方，地球の重力加速度を g_{e} とすると，地球表面と火星表面での万有引力を考えて*2

$$\begin{cases} m_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{e}} = G\dfrac{M_{\mathrm{e}}m_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{e}}^2} \\ m_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{m}} = G\dfrac{M_{\mathrm{m}}m_{\mathrm{s}}}{R_{\mathrm{m}}^2} \end{cases}$$

辺々を割って整理すると，$g_{\mathrm{e}} = \dfrac{M_{\mathrm{e}}}{M_{\mathrm{m}}}\left(\dfrac{R_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{e}}}\right)^2 g_{\mathrm{m}} \quad \cdots (4*)$ となる．地球において，速さが v のときの加速度を a_{e} として運動方程式を立てると

$$m_{\mathrm{s}}a_{\mathrm{e}} = m_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{e}} - 400kv$$

$a_{\mathrm{e}} = 0$ のとき，終端速度となり，このとき

$$v = \frac{m_{\mathrm{s}}g_{\mathrm{e}}}{400k}$$

(4∗) より

$$= \boldsymbol{\frac{m_{\mathrm{s}}}{400k} \times \frac{M_{\mathrm{e}}}{M_{\mathrm{m}}}\left(\frac{R_{\mathrm{m}}}{R_{\mathrm{e}}}\right)^2 g_{\mathrm{m}}}$$

問 11（A） **(4)**　（B） **(3)**　（C） **(8)**　（D） **(9)**　（E） **(17)**　（F） **(20)**
（G） **(27)**　（H） **(31)**

*2 実際は遠心力も考慮すべきだが，万有引力定数が与えられていないため，解くことができない．そこで，遠心力を無視した式を立てた．

[II]

問 1 速度が v のとき，導体棒には Q→P の向きに起電力 vBd が生じる．蓄えられている電荷を Q として，キルヒホッフの法則より

$$vBd - \frac{Q}{C} = 0 \qquad \therefore \qquad Q = \boldsymbol{CBdv}$$

問 2 合力は $\boldsymbol{mg\sin\theta - IBd}$

問 3 $Q = CBdv$ と $I = \dfrac{\Delta Q}{\Delta t}$ より

$$I = \frac{\Delta}{\Delta t}(CBdv) = \boldsymbol{CBd\frac{\Delta v}{\Delta t}}$$

問 4 $a = \dfrac{\Delta v}{\Delta t}$ とすると，$I = CBda$ である．運動方程式を立ててこれを代入して整理すると

$$ma = mg\sin\theta - IBd = mg\sin\theta - CB^2d^2a$$
$$\therefore \quad a = \frac{mg\sin\theta}{m + CB^2d^2}$$

これを $I = CBda$ に代入して

$$I = \boldsymbol{\frac{CBdmg\sin\theta}{m + CB^2d^2}}$$

問 5 問 4 より，導体棒は加速度 $a = \dfrac{mg\sin\theta}{m + CB^2d^2}$ で等加速度運動をしているので，求める速さを v として，等加速度運動の時間消去の式より，

$$v^2 - 0^2 = 2 \times \frac{mg\sin\theta}{m + CB^2d^2} \times x$$
$$\therefore \quad v = \boldsymbol{\sqrt{\frac{2mg\sin\theta}{m + CB^2d^2}x}}$$

問 6 導体棒の速度が v のときのキルヒホッフの法則より

$$vBd - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$$

であり，$v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ を代入して整理すると

$$\frac{\Delta I}{\Delta x} = \boldsymbol{\frac{Bd}{L}}$$

問 7 $I - x$ グラフの傾きが問 6 より，$\dfrac{Bd}{L}$ で一定であり，$x = 0$ で $I = 0$ なので，I は x に比例する．したがって

$$I = \boldsymbol{\frac{Bd}{L}x}$$

問 8 加速度を a として，運動方程式を立て，$I=\dfrac{Bd}{L}x$ を代入して

$$ma=mg\sin\theta-IBd=-\frac{B^2d^2}{L}\left(x-\frac{mgL\sin\theta}{B^2d^2}\right)$$

この運動方程式より，角振動数 ω は

$$\omega=\sqrt{\frac{B^2d^2}{mL}}=\frac{Bd}{\sqrt{mL}}$$

であり，周期 T は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}=\boldsymbol{\frac{2\pi\sqrt{mL}}{Bd}}$$

また，中心座標は $\dfrac{mgL\sin\theta}{B^2d^2}$ であり，$x=0$ で速度が 0 であったことから，ここが振動の上端となる．したがって，振幅は

$$\boldsymbol{\frac{mgL\sin\theta}{B^2d^2}}$$