コイル全体のエネルギー

コイル 1，2 に電流 I_1，I_2 が流れている．コイル 1，2 の自己インダクタンスを L_1，L_2，これらの相互インダクタンスが M のとき，コイル 1，2 全体のエネルギー U は

$$U = \frac{1}{2}L_1 I_1^2 + \frac{1}{2}L_2 I_2^2 + M I_1 I_2 \quad \cdots(*)$$

$(*)$ を使って，大問 3 の問 4 を考えてみる．問 4 では，$t = T_0$ から $t = 2T_0$ までの間にコイルに蓄えられているエネルギーの増加をきいている．コイルの電流は時間によらず一定であるから，コイル 2 のエネルギーの変化は 0 である．また，$N_1\Phi_1 = L_1 I_1$ の関係から

$$L_1 = \frac{\mu_0 N_1^2 S_1}{d}$$

であり，$t = T_0$ のとき，$I_1 = \alpha T_0$，$t = 2T_0$ のとき，$I_1 = 2\alpha T_0$ なので，コイル 1 に蓄えられているエネルギーの変化 ΔU_1 は

$$\Delta U_1 = \frac{1}{2}L_1\left\{(2\alpha T_0)^2 - (\alpha T_0)^2\right\} = \frac{3\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha^2 T_0^2}{2d} \quad \cdots①$$

また，相互インダクタンスは $M = \dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S_1}{d}$ であり，コイル 1 と 2 の相互誘導のエネルギー変化 ΔU_2 は，$I_2 = -\dfrac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 \alpha}{R_2 d}$ で一定であることに注意して

$$\begin{aligned}\Delta U_2 &= M\left(2\alpha T_0 \times I_2 - \alpha T_0 \times I_2\right)\\ &= -\left(\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 \alpha}{d}\right)^2 \cdot \frac{T_0}{R_2} \quad \cdots②\end{aligned}$$

①, ② より

$$\begin{aligned}\Delta U &= \Delta U_1 + \Delta U_2\\ &= \frac{3\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha^2 T_0^2}{2d} - \left(\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 \alpha}{d}\right)^2 \cdot \frac{T_0}{R_2}\\ &= \boldsymbol{\frac{\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha^2 T_0}{d}\left(\frac{3}{2}T_0 - \frac{\mu_0 N_2^2 S_1}{R_2 d}\right)}\end{aligned}$$