$v^2 = \dfrac{\alpha P_0}{\rho_0}$ について

気体塊 B が高密度帯に入ることで圧力，体積，絶対温度が $(P_0,\, V_0,\, T_0)$ から $(P_0 + \varDelta P,\, V_0 + \varDelta V$
$,\, T_0 + \varDelta T)$ に変化したとき，物質量を n，気体定数を R として，状態方程式は

$$(P_0 + \varDelta P)(V_0 + \varDelta V) = nR(T + \varDelta T)$$

$$\therefore \quad P_0 V_0 + P_0 \cdot (\varDelta V) + (\varDelta P) \cdot V_0 + (\varDelta P) \cdot (\varDelta V) = nRT_0 + nR\varDelta T$$

状態 $(P_0,\, V_0,\, T_0)$ における状態方程式，$P_0 V_0 = nRT_0$ と，$(\varDelta P) \cdot (\varDelta V) \fallingdotseq 0$ の近似をして

$$P_0 \cdot (\varDelta V) + (\varDelta P) \cdot V_0 = nR\varDelta T \qquad \therefore \quad n\varDelta T = \frac{P_0 \cdot (\varDelta V) + (\varDelta P) \cdot V_0}{R} \quad \cdots (*)$$

また，高密度帯 A の通過時間は非常に短いため，断熱変化と考えることができる．定積モル比熱を C_V として，熱力学第一法則より，

$$nC_V \varDelta T = 0 - P_0 \varDelta V \quad \cdots (2*)$$

$(2*)$ に $(*)$ を代入して

$$C_V \times \left(\frac{P_0 \cdot (\varDelta V) + (\varDelta P) \cdot V_0}{R} \right) = -P_0 \varDelta V$$

$$\therefore \quad \frac{C_V + R}{R} \cdot P_0 \cdot (\varDelta V) = -\frac{C_V}{R} (\varDelta P) \cdot V_0$$

理想気体のマイヤーの関係式，$C_P = C_V + R$ を用いて整理し，$\dfrac{\varDelta P}{\varDelta V}$ を求めると

$$\therefore \quad \frac{\varDelta P}{\varDelta V} = -\frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{P_0}{V_0} \quad \cdots (3*)$$

$(3*)$ を (12) の 2 乗した式，$v^2 = -\dfrac{V_0}{\rho_0} \cdot \dfrac{\varDelta P}{\varDelta V}$ に代入すると

$$\therefore \quad v^2 = -\frac{V_0}{\rho_0} \cdot \left(-\frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{P_0}{V_0} \right) = \frac{C_P}{C_V} \cdot \frac{P_0}{\rho_0}$$

ここで，$\alpha = \dfrac{C_P}{C_V}$ とすれば，$v^2 = \dfrac{\alpha P_0}{\rho_0}$ を得る．