[I]

(1) 部分 L の長さは $u\Delta t$ なので，質量は $\boldsymbol{\rho u \Delta t}$ **…(g)**

(2) A の部分にはたらく力を分解して，y 方向の力の成分は $T\sin\theta$．$\sin\theta \fallingdotseq \theta$ より，$\boldsymbol{T\theta}$ **…(h)**

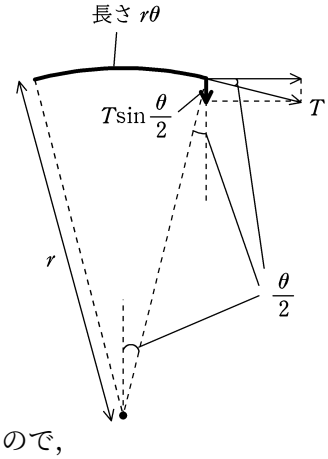
(3) y 方向の速度は $u\tan\theta \fallingdotseq \boldsymbol{u\theta}$ **…(a)**

(4) 運動量変化と力積の関係より

$$\underbrace{\rho u \Delta t}_{\text{質量}} \times \underbrace{u\theta}_{y\text{ 方向の速度}} = \underbrace{T\theta \times \Delta t}_{\text{力積}}$$

$$\therefore \quad u = \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\rho}}} \ \cdots\textbf{(d)}$$

(5) 張力を分解すると



$$2 \times T\sin\frac{\theta}{2} \fallingdotseq 2 \times T \times \frac{\theta}{2} = \boldsymbol{T\theta} \ \cdots\textbf{(f)}$$

(6) 角度 θ の弧の長さは $r\theta$ だから，質量は $\boldsymbol{\rho r\theta}$ **…(e)**

(7) 向心方向の運動方程式より

$$\rho r\theta \times \frac{u^2}{r} = T\theta$$

$$\therefore \quad u = \sqrt{\frac{\boldsymbol{T}}{\boldsymbol{\rho}}} \ \cdots\textbf{(c)}$$

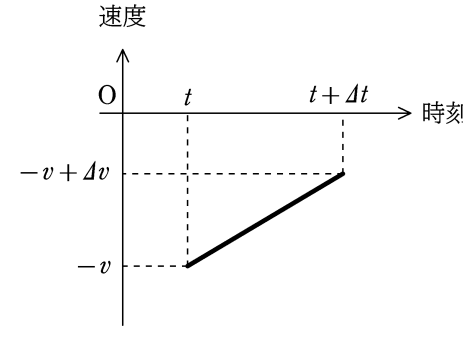
(8) CD 間の距離が $v\Delta t$ であり，気体塊 B の体積が V_0，断面積が S なので，

$$V_0 = S \times v\Delta t \qquad \therefore \quad \Delta t = \frac{\boldsymbol{V_0}}{\boldsymbol{Sv}} \ \cdots\textbf{(b)}$$

(9) 気体塊 B は左側から $(P+\Delta P)S$，右側から PS の力を受けるので

$$(P+\Delta P)S - PS = \boldsymbol{(\Delta P)S} \ \cdots\textbf{(h)}$$

(10) 重心は一定の割合で速度が変化するとあるので，速度と時間の関係のグラフをかくと右図のようになる．ここから，重心の移動距離を計算して



$$\frac{1}{2} \times \{(v-\Delta v)+v\} \times \Delta t = \left(v - \frac{\Delta v}{2}\right)\Delta t$$

一方，面 d の移動距離は $v\Delta t$ なので，面 c の移動距離 Δx_{C} は重心の変位を考えると

$$\left(v - \frac{\Delta v}{2}\right)\Delta t = \frac{\Delta x_{\mathrm{C}} + v\Delta t}{2}$$

$$\therefore \quad \Delta x_{\mathrm{C}} = \boldsymbol{(v - \Delta v)}\Delta t \quad \cdots\textbf{(c)}$$

（11）時間 Δt での移動距離が（10）より，$(v-\Delta v)\Delta t$ だから，面 c が掃いた体積は $V_0+\Delta V=S(v-\Delta v)\Delta t$ である．（8）の $\Delta t=\dfrac{V_0}{Sv}$ を代入して

$$V_0+\Delta V=S(v-\Delta v)\times\frac{V_0}{Sv}$$
$$\therefore\qquad \Delta V=-\boldsymbol{\frac{\Delta v}{v}}V_0\quad\cdots\textbf{(g)}$$

（12）運動量変化と力積の関係より，

$$\rho_0V_0\Delta v=(\Delta P)S\Delta t$$

（11）より，$\Delta v=-\dfrac{v}{V_0}\Delta V$ と，（8）の $\Delta t=\dfrac{V_0}{Sv}$ を代入して

$$\rho_0V_0\times\left(-\frac{2v}{V_0}\Delta V\right)=(\Delta P)S\times\frac{V_0}{Sv}$$
$$\therefore\quad v=\sqrt{\boldsymbol{-\frac{V_0}{\rho_0}\cdot\frac{\Delta P}{\Delta V}}}\cdots\textbf{(a)}$$

（13）状態方程式，$P_0=\dfrac{\rho_0}{M}RT_0$ を，$v^2=\dfrac{\alpha P_0}{\rho_0}$ に代入して

$$v^2=\frac{\alpha}{\rho_0}\times\frac{\rho_0}{M}RT_0=\boldsymbol{\frac{\alpha RT_0}{M}}\quad\cdots\textbf{(d)}$$

（14）（12）より，$\alpha=\dfrac{Mv^2}{RT_0}$ だから

$$\alpha=\frac{(2.9\times10^{-2})\times(3.4\times10^2)^2}{8.3\times290}\fallingdotseq1.39$$

であり，$\boldsymbol{\dfrac{7}{5}}$　$\cdots$**(f)** に近い．

[II]

問 1 斜面方向のつり合いの式より

$$kb = mg\sin\theta \qquad \therefore \quad b = \boldsymbol{\frac{mg\sin\theta}{k}}$$

問 2 つり合いの位置を原点として，斜面上向きに x 座標をとる．位置 x における加速度を α として，運動方程式を立てると

$$ma = -k\left(x - \frac{mg\sin\theta}{k}\right) - mg\sin\theta = -kx$$

単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mV_b^2 = \frac{1}{2}ka^2 \qquad \therefore \quad V_b = \boldsymbol{a\sqrt{\frac{k}{m}}}$$

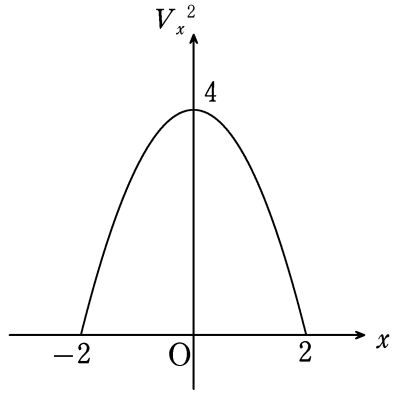
問 3 単振動のエネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mV_x^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \frac{1}{2}ka^2 \qquad \therefore \quad \boldsymbol{V_x^2 = -\frac{k}{m}(x^2 - a^2)}$$

$\dfrac{k}{m} = 1\mathrm{s}^{-2}$，$a = 2\,\mathrm{m}$ より

$$V_x^2 = -x^2 + 4$$

また，振幅は a なので，$-a \leqq x \leqq a$，つまり $-2 \leqq x \leqq 2$ の範囲を動く．したがってグラフは右図.



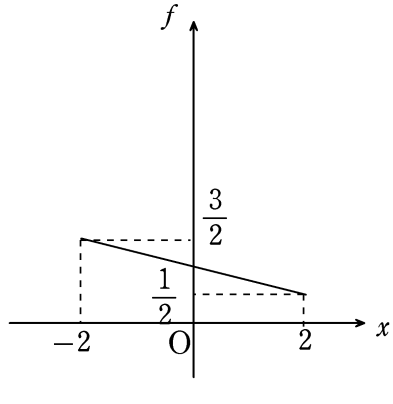
問 4 $|A| = mg\sin\theta$，$|B| = k\left|x - \dfrac{mg\sin\theta}{k}\right|$ であり

$$f = \frac{|B|}{|A|} = \frac{k\left|x - \dfrac{mg\sin\theta}{k}\right|}{mg\sin\theta}$$

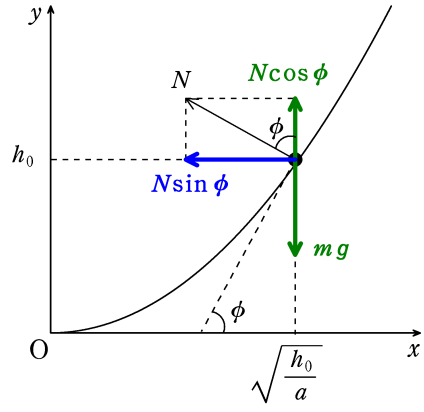
問 1 より，$b = \dfrac{mg\sin\theta}{k}$ で，$b = 4\,\mathrm{m}$ より

$$= \frac{|x-4|}{4}$$

ただし，$a = 2\,\mathrm{m}$ なので，$-2 \leqq x \leqq 2$ である．以上を考慮してグラフは右図.



問 5 高さ h_0 における x 座標は $\sqrt{\dfrac{h_0}{a}}$ であるから，$(x,\ y)=(0,\ h_0)$ を中心とした物体の円運動の半径は $\sqrt{\dfrac{h_0}{a}}$ である．物体にはたらく垂直抗力の大きさを N とすると，右図のような力がはたらく．ただし，$\tan\phi = 2a\sqrt{\dfrac{h_0}{a}} = 2\sqrt{ah_0}$ である．向心方向の運動方程式と鉛直方向のつり合いの式より



$$\begin{cases} m\dfrac{V_0^2}{\sqrt{\dfrac{h_0}{a}}} = N\sin\phi \\ mg = N\cos\phi \end{cases}$$

この式から，N を消去して V_0 を求めると，$V_0 = \boldsymbol{\sqrt{2gh_0}}$

問 6 運動量保存則と力学的エネルギー保存則より

$$\begin{cases} 2mV_0 = mV_a + mV_\mathrm{b} \\ \dfrac{1}{2}kd^2 + \dfrac{1}{2}mV_0^2\times 2 = \dfrac{1}{2}mV_a^2 + \dfrac{1}{2}mV_b^2 \end{cases}$$

これらを解き，$V_a > V_b$ を考慮して，$V_a = \boldsymbol{V_0 + d\sqrt{\dfrac{k}{2m}}}$，$V_b = \boldsymbol{V_0 - d\sqrt{\dfrac{k}{2m}}}$

問 7 水平面方向については面積速度一定則が成り立つ．面積速度一定則と力学的エネルギー保存則より

$$\begin{cases} \sqrt{\dfrac{h_0}{a}}\times V_a = \sqrt{\dfrac{h_1}{a}}\times V_1 \\ \dfrac{1}{2}mV_a^2 + mgh_0 = \dfrac{1}{2}mV_1^2 + mgh_1 \end{cases}$$

これを解いて，$h_1 = \boldsymbol{\dfrac{V_a^2}{2g}}$，$V_1 = \boldsymbol{\sqrt{2gh_0}}$

問 8 $F_r = \dfrac{mV^2}{r}$ であるから，$B = \dfrac{mV^2}{r}\cos\varphi$．また，$A = mg\sin\varphi$．したがって

$$f = \frac{B}{A} = \frac{\dfrac{mV^2}{r}\cos\varphi}{mg\sin\varphi} = \frac{V^2}{gr\tan\varphi}$$

$r = \sqrt{\dfrac{h}{a}}$ であり，$\tan\varphi = 2ar = 2a\sqrt{\dfrac{h}{a}}$ より

$$= \frac{V^2}{2gh}$$

面積速度一定則より，$\sqrt{\dfrac{h_0}{a}}\times V_a = \sqrt{\dfrac{h}{a}}\times V$ から，$V = \sqrt{\dfrac{h_0}{h}}V$ $\cdots(*)$ であり，問 7 より，$h_1 = \dfrac{V_a^2}{2g}$ から，$V_a^2 = 2gh_1$ $\cdots(2*)$ であるので

$$= \frac{\dfrac{h_0}{h}\times V_a^2}{2gh} = \frac{\dfrac{h_0}{h}\times 2gh_1}{2gh} = \boldsymbol{\frac{h_0h_1}{h^2}}$$

また，力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mV_a^2 + mgh_0 = \frac{1}{2}m(V_z^2 + V^2) + mgh$$
$$\therefore \quad V_z^2 = -2g(h-h_0) + V_a^2 - V^2$$

(*)，(2*) より，$V_a^2 - V^2 = \dfrac{2gh_1(h-h_0)}{h}$ なので

$$= -2g(h-h_0) + \frac{2gh_1(h-h_0)}{h}$$
$$= \frac{2g(h-h_0)(h_1-h)}{h} = \boldsymbol{\frac{2gH_1H_2}{h}}$$

問 9 条件は $f=1$ なので，問 7 より，$h_2^2 = h_0h_1$．したがって，$h_2 = \sqrt{\boldsymbol{h_0h_1}}$．$r_0 = \sqrt{\dfrac{h_0}{a}}$，$r_1 = \sqrt{\dfrac{h_1}{a}}$ より，$h_0 = ar_0^2$，$h_1 = ar_1^2$ から，$h_0h_1 = (ar_0r_1)^2$ なので，$h_2^2 = (ar_0r_1)^2$．つまり，$h_2 = ar_0r_1$．これらを問 8 で得た結果に代入して

$$V_z^2 = \frac{2g(h_2-h_0)(h_1-h_2)}{h_2}$$
$$= \frac{2g(ar_0r_1 - ar_0^2)(ar_1^2 - ar_0r_1)}{ar_0r_1}$$
$$= 2ga(r_1-r_0)^2 = \boldsymbol{2gaR^2}$$

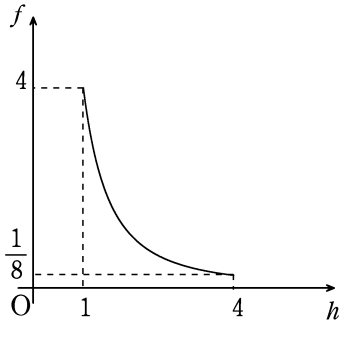
問 10 問 7 の $h_1 = \dfrac{V_a^2}{2g}$ から，$V_a = 2V_0$ を代入して，$h_1 = \dfrac{2V_0^2}{g}$．さらに，問 5 の $V_0 = \sqrt{2gh_0}$ を代入して，$h_1 = 4h_0$．$h_0 = 1\,\mathrm{m}$ を代入して，$h_1 = 4$．問 8 で得た，$f = \dfrac{h_0h_1}{h^2}$ より

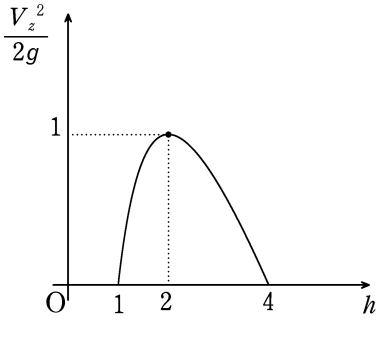
$$f = \frac{1\times 4}{h^2} = \frac{4}{h^2}$$

また，問 8 の結果 $V_z^2 = \dfrac{2g(h-h_0)(h_1-h)}{h}$ より

$$\frac{V_z^2}{2g} = \frac{(h-1)(4-h)}{h}$$

以上をグラフに表すと下のようになる．





問 11 問 10 のグラフによると，$y = h_1$ と $y = h_0$ を回転しながら往復運動をする．

[III]

問 1 コイルに流れる電流 I_1 が $I_1 = \alpha t$ なので，コイル 1 に流れる電流がつくる磁束密度 B_1 は

$$B_1 = \mu_0 \times \frac{N_1}{d} \times \alpha t$$

したがって，コイル 1 を貫く磁束 Φ_1 は

$$\Phi_1 = B_1 S_1 = \boldsymbol{\frac{\mu_0 N_1 S_1 \alpha}{d} t}$$

コイル 1 の外側には磁場が生じないので，コイル 2 を貫く磁束 Φ_2 もコイル 1 と同じで，$\Phi_2 = B_1 S_1 = \boldsymbol{\frac{\mu_0 N_1 S_1 \alpha}{d} t}$

問 2 コイル 2 には一定の電流が流れており，この電流によってコイル内部に生じる磁束は一定の a とすると，コイル 2 内部の磁束は $\Phi_2' = \frac{\mu_0 N_1 S_1 \alpha}{d} t + a$．磁束は図 1 の右向きに増加しているので，誘導起電力により図 1 の左側からみると電流は反時計回りに流れるので負．一方，誘導起電力 V_2 は

$$V_2 = N_2 \frac{\Delta \Phi_2'}{\Delta t} = \frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 \alpha}{d}$$

なので，キルヒホッフの法則より，コイル 2 に流れる電流 I_2 は

$$I_2 = \boldsymbol{-\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 \alpha}{R_2 d}}$$

問 3 キルヒホッフの法則より

$$V(t) - R_1 I_1 - N_1 \frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = 0$$

$I_1 = \alpha t$ と，$\frac{\Delta \Phi_1}{\Delta t} = \frac{\mu_0 N_1 S_1 \alpha}{d}$（コイル 2 の電流による磁束は一定なので，起電力に影響しない．）より

$$\therefore \quad V(t) = \alpha R_1 t + \frac{\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha}{d}$$

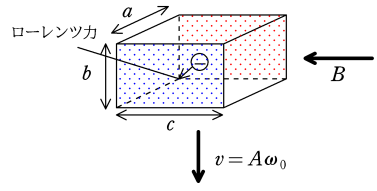
より，(1) は $\boldsymbol{\alpha R_1}$，(2) は $\boldsymbol{\frac{\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha}{d}}$

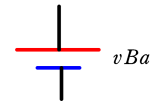
問 4 $t = T_0$ から $t = 2T_0$ までの間に電源がした仕事から抵抗値 R_1，R_2 で生じるジュール熱を引いたものが 2 つのコイルに蓄えられているエネルギーの増加量 ΔU となる．[*1]

$$\begin{aligned}
\Delta U &= \int_{T_0}^{2T_0} \left\{ V(t) I_1 - I_1^2 R_1 - I_2^2 R_2 \right\} dt \\
&= \int_{T_0}^{2T_0} \left\{ \frac{\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha}{d} \alpha t - \left(\frac{\mu_0 N_1 N_2 S_1 \alpha}{R_2 d} \right)^2 R_2 \right\} dt \\
&= \boldsymbol{\frac{\mu_0 N_1^2 S_1 \alpha^2 T_0}{d} \left(\frac{3}{2} T_0 - \frac{\mu_0 N_2^2 S_1}{R_2 d} \right)}
\end{aligned}$$

[*1] $I_1 - t$ グラフの面積でも計算可能

問 5 小領域を通る円筒部分の速さは $A\omega_0$ なので，誘導起電力の大きさは $A\omega_0 \times B \times a = ABa\omega_0$．また，このとき，電子にはたらくローレンツ力の向きを考えれば，起電力は正である．よって，小領域に生じる誘導起電力は，$\boldsymbol{ABa\omega_0}$





上からみた図

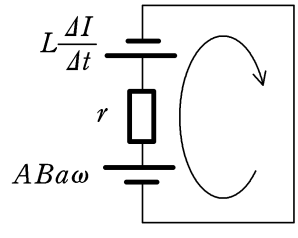
問 6 小領域の抵抗は $\rho\dfrac{a}{bc}$ なので，電流の大きさ I_0 は

$$I_0 = \frac{ABa\omega_0}{\rho\dfrac{a}{bc}} = \boldsymbol{\frac{ABbc\omega_0}{\rho}}$$

問 7 磁石がない場合は外力は仕事をしない．小領域にはたらく電磁力の大きさは I_0Ba であり，この電磁力にさからって外力は仕事をする．1 周回ったときの仕事は

$$I_0Ba \times 2\pi A = \boldsymbol{\frac{2\pi A^2B^2\omega_0abc}{\rho}}$$

問 8 動径方向に起電力がかかるときの抵抗が r なので，問 6 より，$I_0 = \dfrac{ABa\omega_0}{r}$　$\cdots(*)$ である．角速度が ω のときの誘導起電力が $ABa\omega$ であり，右図の回路について，流れる電流を I として，キルヒホッフの法則を立てると



（問題文に，円筒の自己インダクタンスは L とあり，さらに，「小領域」以外の電気抵抗は無視をするとかかれている．また，小領域側の電流が t の一次関数だから，コイル側の相互誘導起電力が定数となり，小領域側の相互誘導起電力は 0 となる．）

$$ABa\omega - rI - L\frac{\Delta I}{\Delta t} = 0$$

電流は t の一次式になると書かれているので，定数 e，f を用いて，$I = et + f$ とし，代入すると

$$ABa\omega - r(et + f) - Le = 0 \quad \cdots(2*)$$

(I) $0 < t < 2T$ のとき，図 3 より，$\omega = \dfrac{\omega_0}{2T}t$ を $(2*)$ に代入して

$$ABa \times \frac{\omega_0}{2T}t - r(et + f) - Le = 0$$

$(*)$ より

$$\therefore \quad \left(\frac{rI_0}{2T} - re\right)t - rf - Le = 0$$

任意の時刻 t でこの式が成り立つのは，$\dfrac{rI_0}{2T} - re = 0$ かつ $-rf - Le$ のとき，つまり，$e = \boldsymbol{\dfrac{I_0}{2T}}$ (3)，$f = \boldsymbol{-\dfrac{LI_0}{2rT}}$ (4)

（II）$4T < t < 5T$ のとき，$\omega = -\dfrac{\omega_0}{T}t + 5\omega_0$ であり，これを (2∗) に代入して

$$ABa \times \left(-\frac{\omega_0}{T}t + 5\omega_0\right) - r(et + f) - Le = 0$$

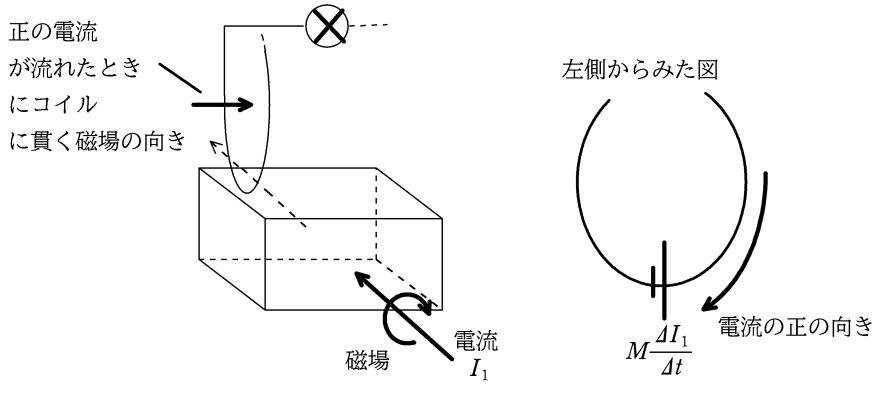
(∗) より

$$-\left(\frac{rI_0}{T} + re\right)t + 5rI_0 - rf - Le = 0$$

任意の時刻 t でこの式が成り立つのは，$\dfrac{rI_0}{T} + re = 0$ かつ，$5rI_0 - rf - Le = 0$ のとき，つまり，$e = \boldsymbol{-\dfrac{I_0}{T}}$ (5)，$f = \boldsymbol{5I_0 + \dfrac{LI_0}{rT}}$ (6)

問 9 小領域に正の電流 I_1 が流れるとき，下図のようにコイルは左 → 右 に磁束が貫く．I_1 が増加しているときは，コイルを貫く磁束が 左 → 右 の方向に増加し，相互誘導起電力が生じる．コイルに流れる電流を I_2 として，コイル側のキルヒホッフの法則より

$$0 - M\frac{\Delta I_1}{\Delta t} - RI_2 = 0 \quad \cdots(3*)$$



（I）$0 < t < 2T$ のとき，問 8 より，$\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = \dfrac{I_0}{2T}$ で，これを (3∗) に代入して I_2 を求めると

$$0 - M \times \frac{I_0}{2T} - RI_2 = 0 \qquad \therefore \quad I_2 = \boldsymbol{-\frac{MI_0}{2RT}}$$

（II）$4T < t < 5T$ のとき,，問 8 より，$\dfrac{\Delta I_1}{\Delta t} = -\dfrac{I_0}{T}$

$$0 - M \times \left(-\frac{I_0}{T}\right) - RI_2 = 0 \qquad \therefore \quad I_2 = \boldsymbol{\frac{MI_0}{RT}}$$

問 10 消費電力の比を考えれば，**4 倍**