1

問 1 台車の斜面方向のつり合いの式より

$$T = mg\sin 30^\circ = \boldsymbol{\frac{1}{2}mg}$$

問 2 ばねの伸びを $\varDelta x$ とする．動滑車のつり合いの式 T を立て，$T = \dfrac{1}{2}mg$ を代入すると

$$2T = k\varDelta x \qquad \therefore \quad \varDelta x = \boldsymbol{\frac{mg}{k}}$$

問 3 $\dfrac{1}{2} \times \left(\dfrac{mg}{k}\right)^2 = \boldsymbol{\dfrac{(mg)^2}{2k}}$

問 4 動滑車を $\dfrac{mg}{k}$ だけ鉛直下方向に移動させてばねが自然長になるようにする．このとき，束縛条件を考えると，台車は $\dfrac{2mg}{k}$ だけ斜面上向きに移動する．

台車の運動はじめた場所からの斜面下向きの変位を x とすると，束縛条件を考えて動滑車は自然長から鉛直上向きに $\dfrac{x}{2}$ 変位する．張力の大きさを T，台車の斜面下向きの加速度を a として，台車の運動方程式と動滑車のつり合いの式*1を立てて

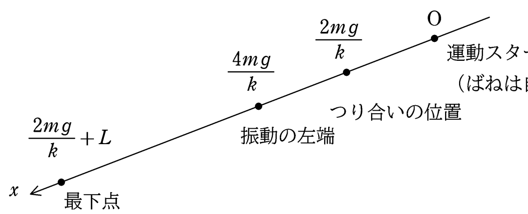
$$\begin{cases} ma = \dfrac{1}{2}mg - T \\ 2T = k \times \dfrac{x}{2} \end{cases}$$

T を消去して，

$$ma = \frac{1}{2}mg - \frac{1}{4}kx = -\frac{1}{4}k\left(x - \frac{2mg}{k}\right)$$

であり，台車は単振動をする．振動の中心は $\dfrac{2mg}{k}$ で，はじめのつり合いの位置と一致し，角振動数 ω は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{4m}}$ である．

台車は速度 0 でスタートしたので，$x = 0$ が振動の右端で，振幅は $\boldsymbol{\dfrac{2mg}{k}}$ である．一方，束縛条件を考えると，動滑車の振幅は $\boldsymbol{\dfrac{mg}{k}}$ となる．



問 5 単振動の最大の速さは（振幅）×（角振動数）だから

$$\frac{2mg}{k} \times \sqrt{\frac{k}{4m}} = \boldsymbol{g\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

*1 動滑車は質量が 0 とみなしているので，加速度を加速度 β が生じていたとしても，運動方程式は

$$0 \times \beta = \text{力の和}$$

となり，常に力の和が 0 となる．

問 6 $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{4m}}$ より，周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

問 7 つり合いの位置 $\left(x = \dfrac{2mg}{k}\right)$ を 2 回目に通過するまでの時間 Δt_1 は $\Delta t_1 = \dfrac{3}{4}T = 3\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ $\cdots(*)$．また，このときの速度は $-g\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ である．糸が切られると，斜面下方向に重力の分解した成分 $mg\sin 30° = \dfrac{1}{2}mg$ のみがはたらき，加速度は $\dfrac{1}{2}g$ となる．糸が切られてから速度が 0 になる時間を Δt_2 として，等加速度運動の速度の式より

$$0 = -g\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{2}g\Delta t_2 \qquad \therefore \quad \Delta t_2 = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \cdots(2*)$$

したがって，求める時間は $(*)$, $(2*)$ より

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = \boldsymbol{(3\pi + 2)\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

また，等加速度運動の時間消去の式より，糸を切り取られてから速度が 0 になるまでの変位 Δx の式は

$$0^2 - \left(-g\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2}g \times \Delta x \qquad \therefore \quad |\Delta x| = \boldsymbol{\frac{mg}{k}}$$

問 8 単振動をしている時刻 t における台車の変位 x と速度 v はそれぞれ

$$x = \frac{2mg}{k} - \frac{2mg}{k}\cos\omega t \quad \cdots(3*)$$
$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2mg}{k}\omega\sin\omega t \quad \cdots(4*)$$

である．座標 x $\left(0 \leqq x \leqq \dfrac{4mg}{k}\right)$ において糸が切れたとする．この地点での最下点との距離は $\dfrac{2mg}{k} + L - x$ である．最下点での台車の速度を V として，等加速度運動の時間消去の式より

$$V^2 - v^2 = 2 \times \frac{1}{2}g \times \left(\frac{2mg}{k} + L - x\right)$$

$(3*)$ と $(4*)$ に $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{4m}}$ を代入した，$v = g\sqrt{\dfrac{m}{k}}\sin\omega t$ を代入して

$$V^2 - \left(g\sqrt{\frac{m}{k}}\sin\omega t\right)^2 = g\left(L + \frac{2mg}{k}\cos\omega t\right)$$

$\sin^2\omega t = 1 - \cos^2\omega t$ を用いて，式を整理する．

$$\therefore \quad V^2 = -\frac{mg^2}{k}(\cos\omega t - 1)^2 + \frac{2mg^2}{k} + gL$$

したがって，$\cos\omega t = 1$ つまり，$t = \dfrac{2\pi}{\omega} = \boldsymbol{4\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}}$ ($0 < t$ でもっとも早い時刻という指定がある．) のとき，最大値 $V = \boldsymbol{\sqrt{\dfrac{2mg^2}{k} + gL}}$

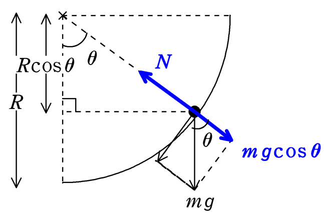
$\boxed{2}$

問 1 力学的エネルギー保存則より

$$mga = \frac{1}{2}mv_0^2 \qquad \therefore \quad a = \boldsymbol{\frac{v_0^2}{2g}} \quad \cdots(*)$$

問 2 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mga(1-\cos\theta)$$



$(*)$ を代入して v について解くと,

$$\therefore \quad v = \boldsymbol{v_0\sqrt{\cos\theta}}$$

また，向心方向の運動方程式より

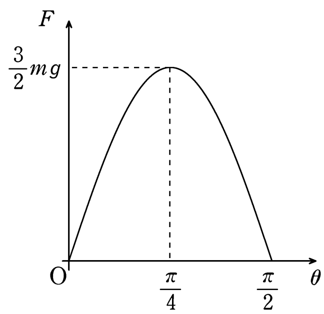
$$m\frac{v^2}{a} = N - mg\cos\theta \tag{1}$$

$v = v_0\sqrt{\cos\theta}$ と $(*)$ を代入して N について解くと

$$\therefore \quad N = \boldsymbol{3mg\cos\theta} \tag{2}$$

問 3 台が受ける小球からの垂直抗力の水平成分は $N\sin\theta$ であり，ストッパー S_2 も同じ力を受ける．F と θ の関係およびそのグラフは下のようになる．

$$N\sin\theta = 3mg\sin\theta\cos\theta$$
$$= \boldsymbol{\frac{3}{2}mg\sin 2\theta}$$



問 4 静止した壁との衝突で小球の速さは e 倍の ev_0 になるから，失われた運動エネルギーは

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m(ev_0)^2 = \boldsymbol{\frac{1}{2}mv_0^2(1-e^2)}$$

問 5 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m(ev_0)^2 = mgh \qquad \therefore \quad h = \boldsymbol{\frac{e^2v_0^2}{2g}}$$

問 6 小球が最高点に達したとき，台からみた小球の速度が 0 になる．つまり，台と小球の速度が一

致する．小球と台の間にはたらく水平方向の力の和が 0 なので運動量が保存するので，運動量保存則より

$$mv_0 = mV + MV \qquad \therefore \quad V = \boldsymbol{\frac{m}{M+m}v_0}$$

また，小球と台を物体系にした力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + mgH$$

$V = \dfrac{m}{M+m}v_0$ を代入して H について解くと

$$\therefore \quad H = \boldsymbol{\frac{Mv_0^2}{2(M+m)g}}$$

問 7 小球が台から受けた水平方向の力積は，運動量変化に等しい．したがって，力積は

$$mV - mv_0 = m \times \frac{m}{M+m}v_0 - mv_0 = -\frac{Mm}{M+m}v_0$$

力積の大きさは $\boldsymbol{\dfrac{Mm}{M+m}v_0}$

問 8 小球が曲面をのぼり，最高点 P に達した後再び水平面 AB に戻ってくるとき，力学的エネルギーが保存しているので，弾性衝突とみなす．[*2]反発係数の定義[*3]を考えれば，再び水平面 AB に戻ってきたときの台からみた小球の速度は $-v_0$ となるから，速度の関係を考えると

$$V_1 + (-v_0) = v_1 \quad \cdots(2*)$$

また，運動量保存則より

$$mv_0 = mv_1 + MV_1 \quad \cdots(3*)$$

(2*), (3*) より，

$$v_1 = \boldsymbol{\frac{m-M}{M+m}v_0}, \qquad V_1 = \boldsymbol{\frac{2m}{M+m}v_0}$$

問 9 台からみた小球の速度は $-v_0$ であり，その大きさは v_0 であるから，距離 L 移動する時間は

$$T = \boldsymbol{\frac{L}{v_0}}$$

[*2] 力学的エネルギー保存則と運動量保存則の連立でも解ける．

[*3] 反発係数は，衝突前の相対速度の大きさと衝突後の相対速度の大きさの比

問 10 壁と衝突した直後の小球，台の速度を v_2, V_2 とする．反発係数の式と運動量保存則をまともに立てると面倒な式になるので，次のような工夫をする．*4

まず，運動量保存則は衝突の直前後ではなく，小球の速度が v_0，台の速度が 0 の状態と壁と衝突した直後の式を立てる．

$$mv_0 = mv_2 + MV_2 \quad \cdots(4*)$$

また，壁と衝突したとき，台からみた小球の速度は $-e$ 倍となるので

$$v_2 - V_2 = -e\times(-v_0) \quad \cdots(5*)$$

(4*), (5*) を解いて，$v_2 = \dfrac{m+Me}{M+m}v_0$．したがって，小球の運動エネルギーの変化 $\varDelta K_1$ は

$$\begin{aligned}\varDelta K_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_2^2\\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{m+Me}{M+m}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{m-M}{M+m}v_0\right)^2\\ &= \frac{Mmv_0^2}{2(M+m)}\cdot\left\{2m(e+1) - M(1-e^2)\right\}\end{aligned}$$

$\varDelta K_1 > 0$ が条件なので

$$2m(e+1) - M(1-e^2) > 0 \qquad \therefore \quad m > \frac{1-e}{2}M$$

したがって，$m_1 = \boldsymbol{\dfrac{1-e}{2}M}$

*4 まともに式を立てると

$$\begin{aligned}e &= -\frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1}\\ mv_1 + MV_1 &= mv_2 + MV_2\end{aligned}$$

になる．

4

問 1 導体棒の速度の向きと垂直な磁束密度の成分は $B\cos\theta$ であることに注意して，誘導起電力の大きさは $V = vB\cos\theta l = \boldsymbol{vBl\cos\theta}$

問 2 抵抗線の両端に生じる電位差が $V = vBl\cos\theta$ であるから，電場と電位差の関係より電場の大きさ E は

$$E = \frac{V}{l} = \frac{vBl\cos\theta}{l} = \boldsymbol{vB\cos\theta}$$

問 3 静電気力の大きさは $eE = vBe\cos\theta$ であり，速度が v のとき，誘導起電力の向きは P → Q で，Q′ → P′ の向きに電場が生じる．すると，自由電子がうける静電気力は $(-e)\times E = -vBe\cos\theta$ であり，自由電子が Q′ → P′ の方向（正の方向）に速度 c_1 をもっているときの抵抗力は $-kc_1$ なので運動方程式は

$$\boldsymbol{ma = -vBe\cos\theta - kc}$$

問 4 速度が変化しなくなったので，$a = 0$ なので

$$0 = -vBe\cos\theta - kc_1 \qquad \therefore \quad c_1 = \boldsymbol{-\frac{vBe\cos\theta}{k}}$$

問 5 時間 Δt で 1 つの自由電子が $c_1\Delta t$ 正方向へ変位したとき，ある面を正方向へ通過した電子の数は $c_1\Delta t\times n$ である．したがって，この時間に通過した電気量は $\Delta Q = c_1\Delta t\times n\times(-e)$ であるから，電流の定義式より

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{c_1\Delta t\times n\times(-e)}{\Delta t} = \boldsymbol{-c_1 ne}$$

問 6 問 4 の結果を問 5 に代入して

$$I = -\left(-\frac{vBe\cos\theta}{k}\right)\times ne = \frac{vBne^2\cos\theta}{k}$$

抵抗の定義より，抵抗値 R は

$$R = \left|\frac{V}{I}\right| = \boldsymbol{\frac{kl}{ne^2}}$$

問 7 力が $-kc_1$ がする単位時間にする仕事は

$$W = -kc_1\times c_1 = -kc_1^2$$

$c_1 = -\dfrac{vBe\cos\theta}{k}$ を代入して

$$= \boldsymbol{-\frac{(vBe\cos\theta)^2}{k}}$$

単位時間あたりに発生するジュール熱[*5]は

$$J = IV = \boldsymbol{\frac{(vBe\cos\theta)^2 nl}{k}}$$

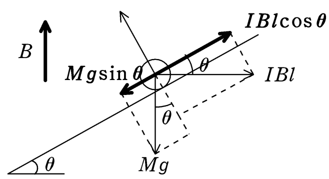
問 8 導体棒の速度が $v = \dfrac{\Delta x}{\Delta t}$ のときの誘導起電力は $vBl\cos\theta = \dfrac{\Delta x}{\Delta t} \times Bl\cos\theta$ であるから，キルヒホッフの法則より

$$\frac{\Delta x}{\Delta t} \times Bl\cos\theta - L\frac{\Delta I}{\Delta t} =$$
$$\therefore \quad \Delta I = \frac{Bl\cos\theta}{L} \times \Delta x$$

したがって，$D = \boldsymbol{\dfrac{Bl\cos\theta}{L}}$

問 9 $I - x$ グラフを考えれば，$x = 0$ のとき，$I = 0$ で $\dfrac{\Delta I}{\Delta x} = \dfrac{Bl\cos\theta}{L} =$ 一定 から，傾きが一定なので，原点を通る直線となる．つまり，I は x に比例し，問題文に書かれているように

$$I = \frac{Bl\cos\theta}{L}x$$



の関係がある．電流 I が流れたとき，電磁力の大きさは IBl で, 斜面方向に分解すると $IBl\cos\theta$．また, 重力 Mg の斜面方向に分解した成分が $Mg\sin\theta$ であるから，運動方程式は，$I = \dfrac{Bl\cos\theta}{L}x$ も考慮して

$$\boldsymbol{Ma} = Mg\sin\theta - IBl\cos\theta \boldsymbol{= Mg\sin\theta - \frac{(Bl\cos\theta)^2}{L}x}$$

問 10 問 9 の運動方程式は

$$Ma = -\frac{(Bl\cos\theta)^2}{L}\left(x - \frac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}\right)$$

この運動方程式から，振動の中心は $\dfrac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}$ であり，$x = 0$ から速度 0 でスタートしたか

[*5] 長さ l の抵抗線には nl 個の自由電子があるため，$J = -W \times nl$ の関係が成り立つ．

ら，振幅 $\dfrac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}$ となる．また，角振動数は

$$\omega=\boldsymbol{\frac{Bl\cos\theta}{\sqrt{ML}}}$$

である．時刻 t における x は

$$x=\frac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}-\frac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}\cos\omega t$$

なので，$\alpha=\boldsymbol{\dfrac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}}$，$\beta=\boldsymbol{-\dfrac{MgL\sin\theta}{(Bl\cos\theta)^2}}$

問 11 力学的エネルギーとコイルの蓄えるエネルギーの和は保存する．はじめの力学的エネルギーは 0 で，コイルの蓄えるエネルギーも 0 であったから，時刻 t における力学的エネルギーとコイルの蓄えるエネルギーの和は $\mathbf{0}$

5

問 1 状態 I における A 室の気体の温度 T_1 は，状態方程式より

$$pS(l+d)=nRT_1 \qquad \therefore \quad T_1=\boldsymbol{\frac{pS(l+d)}{nR}}$$

問 2 ピストンのつり合いの式より，B 室の圧力 p_{B1} は

$$p_{\mathrm{B1}}S+kd=pS \qquad \therefore \quad p_{\mathrm{B1}}=\boldsymbol{p-\frac{kd}{S}}$$

問 3 状態 II における A 室の気体の温度 T_2 は

$$2pS(l+d)=nRT_2 \qquad \therefore \quad T_2=\boldsymbol{\frac{2pS(l+d)}{nR}}$$

問 4 ピストンが動いていないので仕事は **0**

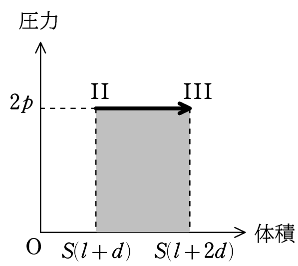
問 5 状態 I から II の内部エネルギー変化 ΔU_{12} は

$$\begin{aligned}\Delta U_{12}&=\frac{3}{2}nR(T_2-T_1)\\&=\frac{3}{2}nR\left\{\frac{2pS(l+d)}{nR}-\frac{pS(l+d)}{nR}\right\}=\boldsymbol{\frac{3}{2}pS(l+d)}\end{aligned}$$

問 6 状態 II から状態 III は圧力が一定なので，(圧力)－(体積) 図の面積より，

A 室気体がした仕事 W_{23} は

$$\begin{aligned}W_{23}&=2p\times Sd\\&=\boldsymbol{2pSd}\end{aligned}$$



問 7 ばねの弾性力による位置エネルギー変化 ΔE_{23} は

$$\Delta E_{23}=\frac{1}{2}k\times(2d)^2-\frac{1}{2}kd^2=\boldsymbol{\frac{3}{2}kd^2}$$

問 8 状態 II から III の内部エネルギー変化 ΔU_{23} は[*6]

$$\Delta U_{23}=\frac{3}{2}\times 2p\times\{S(l+2d)-S(l+d)\}=3pSd$$

[*6] 単原子分子理想気体の内部エネルギー変化

$$\Delta U=\frac{3}{2}nR\Delta T=\frac{3}{2}\Delta(pV)$$

を用いた.

熱力学第一法則より，吸収した熱量 Q_{23} は

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} + W_{23} \\ &= 3pSd + 2pSd = \boldsymbol{5pSd} \end{aligned}$$

問 9 状態 III において，B 室の圧力を p_{B3} とすると，ピストンのつり合いの式より

$$p_{\mathrm{B3}}S + k \times 2d = 2p \times S \qquad \therefore \quad p_{\mathrm{B3}} = 2p - \frac{2kd}{S}$$

B室に圧力を一定にしていることに注意して，ばねの伸びが d のときの A 室の気体の圧力を p_{A} とすると，ピストンのつり合いの式より

$$\left(2p - \frac{2kd}{S}\right) \times S + kd = p_{\mathrm{A}}S \qquad \therefore \quad p_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{2p - \frac{kd}{S}}$$

問 10 同じくB室に圧力を一定にしていることに注意して，ばねが自然長のときの A 室の気体の圧力を p'_{A} とすると，ピストンのつり合いの式より

$$\left(2p - \frac{2kd}{S}\right) \times S = p'_{\mathrm{A}}S \qquad \therefore \quad p_{\mathrm{A}} = 2p - \frac{2kd}{S}$$

また，このときの A 室の温度を T'_{A} として，理想気体の状態方程式より

$$\left(2p - \frac{2kd}{S}\right) \times Sl = nRT'_{\mathrm{A}} \qquad \therefore \quad T'_{\mathrm{A}} = \boldsymbol{\frac{2(pS - kd)l}{nR}}$$

$\boxed{6}$

A 問 1

　問 2

　問 3

　問 4

B 問 1

　問 2