

2023 年

1

問1 台車の斜面方向のつり合いの式より

$$T = mg \sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$$

問2 ばねの伸びを Δx とする. 動滑車のつり合いの式を立て, $T = \frac{1}{2}mg$ を代入すると

$$2T = k\Delta x \quad \therefore \Delta x = \frac{mg}{k}$$

$$\text{問3 } \frac{1}{2} \times \left(\frac{mg}{k}\right)^2 = \frac{(mg)^2}{2k}$$

問4 動滑車を $\frac{mg}{k}$ だけ鉛直下方向に移動させてばねが自然長になるようにする. このとき, 束縛条件を考えると, 台車は $\frac{2mg}{k}$ だけ斜面上向きに移動する.

台車が運動はじめた場所からの斜面下向きの変位を x とすると, 束縛条件を考えて動滑車は自然長から鉛直上向きに $\frac{x}{2}$ 変位する. 張力の大きさを T , 台車の斜面下向きの加速度を a として, 台車の運動方程式と動滑車のつり合いの式*1を立てて

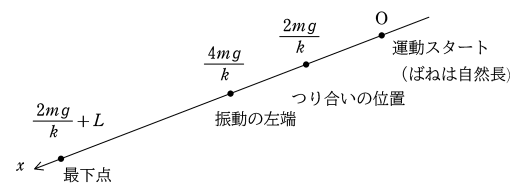
$$\begin{cases} ma = \frac{1}{2}mg - T \\ 2T = k \times \frac{x}{2} \end{cases}$$

T を消去して,

$$ma = \frac{1}{2}mg - \frac{1}{4}kx = -\frac{1}{4}k\left(x - \frac{2mg}{k}\right)$$

であり, 台車は単振動をする. 振動の中心は $\frac{2mg}{k}$ で, はじめのつり合いの位置と一致し, 角振動数 ω は $\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}}$ である.

台車は速度 0 でスタートしたので, $x = 0$ が振動の右端で, 振幅は $\frac{2mg}{k}$ である. 一方, 束縛条件を考えると, 動滑車の振幅は $\frac{mg}{k}$ となる.



問5 単振動の最大の速さは (振幅) × (角振動数) だから

$$\frac{2mg}{k} \times \sqrt{\frac{k}{4m}} = g \sqrt{\frac{m}{k}}$$

問6 $\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}}$ より, 周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi \sqrt{\frac{m}{k}}$$

*1 動滑車は質量が 0 とみなしているので, 加速度を加速度 β が生じていたとしても, 運動方程式は

$$0 \times \beta = \text{力の和}$$

となり, 常に力の和が 0 となる.

問7 つり合いの位置 $\left(x = \frac{2mg}{k}\right)$ を2回目に通るまでの時間 Δt_1 は $\Delta t_1 = \frac{3}{4}T = 3\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ …(*). また、このときの速度は $-g\sqrt{\frac{m}{k}}$ である。糸が切られると、斜面下方向に重力の分解した成分 $mg \sin 30^\circ = \frac{1}{2}mg$ のみがはたらき、加速度は $\frac{1}{2}g$ となる。糸が切られてから速度が0になる時間を Δt_2 として、等加速度運動の速度の式より

$$0 = -g\sqrt{\frac{m}{k}} + \frac{1}{2}g\Delta t_2 \quad \therefore \Delta t_2 = 2\sqrt{\frac{m}{k}} \quad \dots(2*)$$

したがって、求める時間は (*), (2*) より

$$\Delta t_1 + \Delta t_2 = (3\pi + 2)\sqrt{\frac{m}{k}}$$

また、等加速度運動の時間消去の式より、糸を切り取られてから速度が0になるまでの変位 Δx の式は

$$0^2 - \left(-g\sqrt{\frac{m}{k}}\right)^2 = 2 \times \frac{1}{2}g \times \Delta x \quad \therefore |\Delta x| = \frac{mg}{k}$$

問8 単振動をしている時刻 t における台車の変位 x と速度 v はそれぞれ

$$x = \frac{2mg}{k} - \frac{2mg}{k} \cos \omega t \quad \dots(3*)$$

$$v = \frac{dx}{dt} = \frac{2mg}{k} \omega \sin \omega t \quad \dots(4*)$$

である。座標 x ($0 \leq x \leq \frac{4mg}{k}$) において糸が切れたとする。この地点での最下点との距離は $\frac{2mg}{k} + L - x$ である。最下点での台車の速度を V として、等加速度運動の時間消去の式より

$$V^2 - v^2 = 2 \times \frac{1}{2}g \times \left(\frac{2mg}{k} + L - x\right)$$

(3*) と (4*) に $\omega = \sqrt{\frac{k}{4m}}$, $v = g\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \omega t$ を代入して

$$V^2 - \left(g\sqrt{\frac{m}{k}} \sin \omega t\right)^2 = g\left(L + \frac{2mg}{k} \cos \omega t\right)$$

$\sin^2 \omega t = 1 - \cos^2 \omega t$ を用いて、式を整理する。

$$\therefore V^2 = -\frac{mg^2}{k} (\cos \omega t - 1)^2 + \frac{2mg^2}{k} + gL$$

したがって、 $\cos \omega t = 1$ つまり、 $t = \frac{2\pi}{\omega} = 4\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ($0 < t$ でもっとも早い時刻という指定がある。) のとき、最大

$$\text{値 } V = \sqrt{\frac{2mg^2}{k} + gL}$$

2

問1 力学的エネルギー保存則より

$$mga = \frac{1}{2}mv_0^2 \quad \therefore a = \frac{v_0^2}{2g} \quad \dots(*)$$

問2 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv^2 + mga(1 - \cos\theta)$$

(*) を代入して v について解くと,

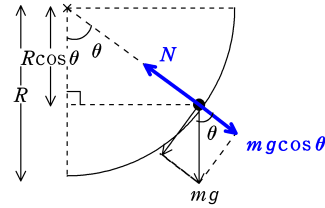
$$\therefore v = v_0\sqrt{\cos\theta}$$

また, 向心方向の運動方程式より

$$m\frac{v^2}{a} = N - mg\cos\theta$$

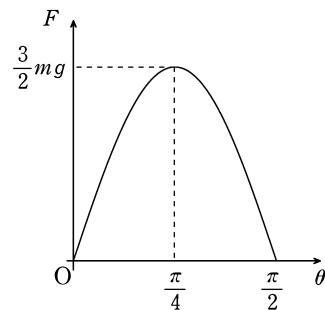
$v = v_0\sqrt{\cos\theta}$ と (*) を代入して N について解くと

$$\therefore N = 3mg\cos\theta$$



問3 台が受ける小球からの垂直抗力の水平成分は $N \sin\theta$ であり, ストッパー S_2 も同じ力を受ける. F と θ の関係およびそのグラフは下のようになる.

$$\begin{aligned} N \sin\theta &= 3mg \sin\theta \cos\theta \\ &= \frac{3}{2}mg \sin 2\theta \end{aligned}$$



問4 静止した壁との衝突で小球の速さは e 倍の ev_0 になるから, 失われた運動エネルギーは

$$\Delta E = \frac{1}{2}mv_0^2 - \frac{1}{2}m(ev_0)^2 = \frac{1}{2}mv_0^2(1 - e^2)$$

問5 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}m(ev_0)^2 = mgh \quad \therefore h = \frac{e^2v_0^2}{2g}$$

問6 小球が最高点に達したとき, 台からみた小球の速度が 0 になる. つまり, 台と小球の速度が一致する. 小球と台の間にはたらく水平方向の力の和が 0 なので運動量が保存する. 運動量保存則より

$$mv_0 = mV + MV \quad \therefore V = \frac{m}{M+m}v_0$$

また, 小球と台を物体系にした力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}(M+m)V^2 + mgH$$

$V = \frac{m}{M+m}v_0$ を代入して H について解くと

$$\therefore H = \frac{Mv_0^2}{2(M+m)g}$$

問7 小球が台から受けた水平方向の力積は、運動量変化に等しい。したがって、力積は

$$mV - mv_0 = m \times \frac{m}{M+m}v_0 - mv_0 = -\frac{Mm}{M+m}v_0$$

力積の大きさは $\frac{Mm}{M+m}v_0$

問8 小球が曲面をのぼり、最高点 P に達した後再び水平面 AB に戻ってくるとき、力学的エネルギーが保存しているので、弾性衝突とみなす。^{*2}反発係数の定義^{*3}を考えれば、再び水平面 AB に戻ってきたときの台からみた小球の速度は $-v_0$ となるから、速度の関係を考えると

$$V_1 + (-v_0) = v_1 \quad \dots(2^*)$$

また、運動量保存則より

$$mv_0 = mv_1 + MV_1 \quad \dots(3^*)$$

(2*), (3*) より,

$$v_1 = \frac{m-M}{M+m}v_0, \quad V_1 = \frac{2m}{M+m}v_0$$

問9 台からみた小球の速度は $-v_0$ であり、その大きさは v_0 であるから、距離 L 移動する時間は

$$T = \frac{L}{v_0}$$

^{*2} 力学的エネルギー保存則と運動量保存則の連立でも解ける。

^{*3} 反発係数は、衝突前の相対速度の大きさと衝突後の相対速度の大きさの比

問10 壁と衝突した直後の小球, 台の速度を v_2, V_2 とする. 反発係数の式と運動量保存則をまともに立てると面倒な式になるので, 次のような工夫をする.*⁴

まず, 運動量保存則は衝突の直前後ではなく, 小球の速度が v_0 , 台の速度が 0 の状態と壁と衝突した直後の式を立てる.

$$mv_0 = mv_2 + MV_2 \quad \dots(4^*)$$

また, 壁と衝突したとき, 台からみた小球の速度は $-e$ 倍となるので

$$v_2 - V_2 = -e \times (-v_0) \quad \dots(5^*)$$

(4*), (5*) を解いて, $v_2 = \frac{m + Me}{M + m} v_0$. したがって, 小球の運動エネルギーの変化 ΔK_1 は

$$\begin{aligned} \Delta K_1 &= \frac{1}{2}mv_2^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \\ &= \frac{1}{2}m\left(\frac{m + Me}{M + m}v_0\right)^2 - \frac{1}{2}m\left(\frac{m - M}{M + m}v_0\right)^2 \\ &= \frac{Mmv_0^2}{2(M + m)} \cdot \{2m(e + 1) - M(1 - e^2)\} \end{aligned}$$

$\Delta K_1 > 0$ が条件なので

$$2m(e + 1) - M(1 - e^2) > 0 \quad \therefore m > \frac{1 - e}{2}M$$

したがって, $m_1 = \frac{1 - e}{2}M$

*⁴ まともに式を立てると

$$\begin{aligned} e &= -\frac{v_2 - V_2}{v_1 - V_1} \\ mv_1 + MV_1 &= mv_2 + MV_2 \end{aligned}$$

になる.

4

問1 導体棒の速度の向きと垂直な磁束密度の成分は $B \cos \theta$ であることに注意して、誘導起電力の大きさは $V = vB \cos \theta l = vBl \cos \theta$

問2 抵抗線の両端に生じる電位差が $V = vBl \cos \theta$ であるから、電場と電位差の関係より電場の大きさ E は

$$E = \frac{V}{l} = \frac{vBl \cos \theta}{l} = vB \cos \theta$$

問3 静電気力の大きさは $eE = vBe \cos \theta$ であり、速度が v のとき、誘導起電力の向きは $P \rightarrow Q$ で、 $Q' \rightarrow P'$ の向きに電場が生じる。すると、自由電子がうける静電気力は $(-e) \times E = -vBe \cos \theta$ であり、自由電子が $Q' \rightarrow P'$ の方向(正の方向)に速度 c_1 をもっているときの抵抗力は $-kc_1$ なので運動方程式は

$$ma = -vBe \cos \theta - kc$$

問4 速度が変化しなくなったので、 $a = 0$ であるから

$$0 = -vBe \cos \theta - kc_1 \quad \therefore \quad c_1 = -\frac{vBe \cos \theta}{k}$$

問5 時間 Δt で1つの自由電子が $c_1 \Delta t$ 正方向へ変位したとき、ある面を正方向へ通過した電子の数は $c_1 \Delta t \times n$ である。したがって、この時間に通過した電気量は $\Delta Q = c_1 \Delta t \times n \times (-e)$ であるから、電流の定義式より

$$I = \frac{\Delta Q}{\Delta t} = \frac{c_1 \Delta t \times n \times (-e)}{\Delta t} = -c_1 ne$$

問6 問4の結果を問5に代入して

$$I = -\left(-\frac{vBe \cos \theta}{k}\right) \times ne = \frac{vBne^2 \cos \theta}{k}$$

抵抗の定義より、抵抗値 R は

$$R = \left|\frac{V}{I}\right| = \frac{kl}{ne^2}$$

問7 力が $-kc_1$ がする単位時間にする仕事は

$$W = -kc_1 \times c_1 = -kc_1^2$$

$c_1 = -\frac{vBe \cos \theta}{k}$ を代入して

$$= -\frac{(vBe \cos \theta)^2}{k}$$

単位時間あたりに発生するジュール熱^{*5}は

$$J = IV = \frac{(vBe \cos \theta)^2 nl}{k}$$

問8 導体棒の速度が $v = \frac{\Delta x}{\Delta t}$ のときの誘導起電力は $vBl \cos \theta = \frac{\Delta x}{\Delta t} \times Bl \cos \theta$ であるから、キルヒホッフの法則より

$$\begin{aligned} \frac{\Delta x}{\Delta t} \times Bl \cos \theta - L \frac{\Delta I}{\Delta t} &= \\ \therefore \Delta I &= \frac{Bl \cos \theta}{L} \times \Delta x \end{aligned}$$

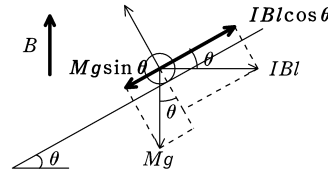
したがって、 $D = \frac{Bl \cos \theta}{L}$

*5 長さ l の抵抗線には nl 個の自由電子があるため、 $J = -W \times nl$ の関係が成り立つ。

問9 $I-x$ グラフを考えれば, $x=0$ のとき, $I=0$ で $\frac{\Delta I}{\Delta x} = \frac{Bl \cos \theta}{L} = \text{一定}$ から, 傾きが一定なので, 原点を通る直線となる. つまり, I は x に比例し, 問題文に書かれているように

$$I = \frac{Bl \cos \theta}{L} x$$

の関係がある. 電流 I が流れたとき, 電磁力の大きさは IBl で, 斜面方向に分解すると $IBl \cos \theta$. また, 重力 Mg の斜面方向に分解した成分が $Mg \sin \theta$ であるから, 運動方程式は, $I = \frac{Bl \cos \theta}{L} x$ も考慮して



$$Ma = Mg \sin \theta - IBl \cos \theta = Mg \sin \theta - \frac{(Bl \cos \theta)^2}{L} x$$

問10 問9の運動方程式は

$$Ma = -\frac{(Bl \cos \theta)^2}{L} \left(x - \frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2} \right)$$

この運動方程式から, 振動の中心は $\frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2}$ であり, $x=0$ から速度0でスタートしたから, 振幅 $\frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2}$ となる. また, 角振動数は

$$\omega = \frac{Bl \cos \theta}{\sqrt{ML}}$$

である. 時刻 t における x は

$$x = \frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2} - \frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2} \cos \omega t$$

なので, $\alpha = \frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2}$, $\beta = -\frac{MgL \sin \theta}{(Bl \cos \theta)^2}$

問11 力学的エネルギーとコイルの蓄えるエネルギーの和は保存する. はじめの力学的エネルギーは0で, コイルの蓄えるエネルギーも0であったから, 時刻 t における力学的エネルギーとコイルの蓄えるエネルギーの和は0

5

問1 状態 I における A 室の気体の温度 T_1 は、状態方程式より

$$pS(l+d) = nRT_1 \quad \therefore T_1 = \frac{pS(l+d)}{nR}$$

問2 ピストンのつり合いの式より、B 室の圧力 p_{B1} は

$$p_{B1}S + kd = pS \quad \therefore p_{B1} = p - \frac{kd}{S}$$

問3 状態 II における A 室の気体の温度 T_2 は

$$2pS(l+d) = nRT_2 \quad \therefore T_2 = \frac{2pS(l+d)}{nR}$$

問4 ピストンが動いていないので仕事は 0

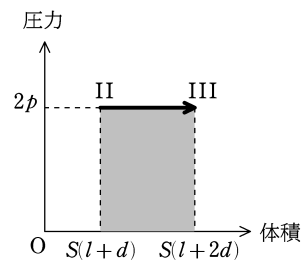
問5 状態 I から II の内部エネルギー変化 ΔU_{12} は

$$\begin{aligned} \Delta U_{12} &= \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) \\ &= \frac{3}{2}nR \left\{ \frac{2pS(l+d)}{nR} - \frac{pS(l+d)}{nR} \right\} = \frac{3}{2}pS(l+d) \end{aligned}$$

問6 状態 II から状態 III は圧力が一定なので、(圧力) - (体積) 図の面積より、

A 室気体がした仕事 W_{23} は

$$\begin{aligned} W_{23} &= 2p \times Sd \\ &= 2pSd \end{aligned}$$



問7 バネの弾性力による位置エネルギー変化 ΔE_{23} は

$$\Delta E_{23} = \frac{1}{2}k \times (2d)^2 - \frac{1}{2}kd^2 = \frac{3}{2}kd^2$$

問8 状態 II から III の内部エネルギー変化 ΔU_{23} は*6

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2} \times 2p \times \{S(l+2d) - S(l+d)\} = 3pSd$$

熱力学第一法則より、吸収した熱量 Q_{23} は

$$\begin{aligned} Q_{23} &= \Delta U_{23} + W_{23} \\ &= 3pSd + 2pSd = 5pSd \end{aligned}$$

問9 状態 III において、B 室の圧力を p_{B3} とすると、ピストンのつり合いの式より

$$p_{B3}S + k \times 2d = 2p \times S \quad \therefore p_{B3} = 2p - \frac{2kd}{S}$$

*6 単原子分子理想気体の内部エネルギー変化

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR\Delta T = \frac{3}{2}\Delta(pV)$$

を用いた.

B室に圧力を一定にしていることに注意して、ばねの伸びが d のときの A 室の気体の圧力を p_A とすると、ピストンのつり合いの式より

$$\left(2p - \frac{2kd}{S}\right) \times S + kd = p_A S \quad \therefore p_A = 2p - \frac{kd}{S}$$

問10 同じく B室に圧力を一定にしていることに注意して、ばねが自然長のときの A 室の気体の圧力を p'_A とすると、ピストンのつり合いの式より

$$\left(2p - \frac{2kd}{S}\right) \times S = p'_A S \quad \therefore p_A = 2p - \frac{2kd}{S}$$

また、このときの A 室の温度を T'_A として、理想気体の状態方程式より

$$\left(2p - \frac{2kd}{S}\right) \times Sl = nRT'_A \quad \therefore T'_A = \frac{2(pS - kd)l}{nR}$$

6

A 問1 図より, $\tan r \simeq r$, $\tan i \simeq i$ を用いて

$$l = d_1 \tan r + d_2 \tan i = d_1 r + d_2 i$$

屈折の法則から, $n_1 \sin r = n_2 \sin i$, 近似をして $n_1 r \simeq n_2 i$. $i = \frac{n_1}{n_2} r$ を上式に代入すると

$$\begin{aligned} &= \frac{(n_1 d_2 + n_2 d_1) r}{n_2} \\ \therefore r &= \frac{n_2}{n_1 d_2 + n_2 d_1} l \quad \dots(*) \end{aligned}$$

みかけの長さ $\overline{BC'}$ は

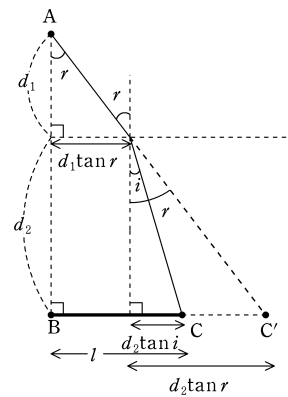
$$\overline{BC'} = d_1 \tan r + d_2 \tan r$$

$\tan r \simeq r$ より

$$= (d_1 + d_2) r$$

(*) を代入して

$$= \frac{n_2(d_1 + d_2)}{n_1 d_2 + n_2 d_1} l$$



問2 図のように i' , r' と点 C, C' を定める. このとき, l は, $\tan i' \simeq i'$, $\tan r' \simeq r'$ を用いて

$$\begin{aligned} l &= d_2 \tan i' + d_1 \tan r' \\ &= d_2 i' + d_1 r' \end{aligned}$$

屈折の法則 $n_2 \sin i' = n_1 \sin r'$ を近似して, $n_2 i' = n_1 r'$ より, $r' = \frac{n_2}{n_1} i'$ を上式に代入して

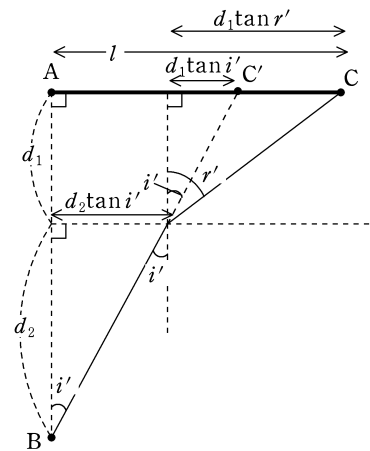
$$\begin{aligned} &= \frac{n_2 d_1 + n_1 d_2}{n_1} i' \\ \therefore i' &= \frac{n_1}{n_2 d_1 + n_1 d_2} l \quad \dots(2*) \end{aligned}$$

一方, みかけの長さ $\overline{AC'}$ は

$$\overline{AC'} = d_2 \tan i' + d_1 \tan i'$$

(2*) を代入して

$$= \frac{n_1(d_1 + d_2)}{n_2 d_1 + n_1 d_2} l$$



*7

*7 これは, 問1の結果において, d_1 と d_2 を交換し, n_1 と n_2 を交換したものと同一.

問3 入射角が臨界角 i_C になるときを考える. このとき, 屈折の法則より

$$n_2 \sin i_C = n_1 \sin \frac{\pi}{2} \quad \therefore \sin i_C = \frac{n_1}{n_2}$$

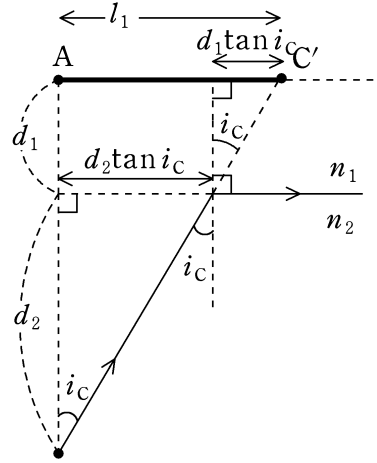
$$\sin i_C = \frac{n_1}{n_2} \text{ より, } \tan i_C = \frac{n_1}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}} \quad \dots(3^*) \text{ み}$$

かけの長さ l_1 は

$$l_1 = (d_1 + d_2) \tan i_C$$

(3*) より

$$= \frac{n_1(d_1 + d_2)}{\sqrt{n_2^2 - n_1^2}}$$



問4 図のように点 A, B, C, D, E, F, G, H, H' と, 角度 $\theta_1, \theta_2, \theta_3$ を設定する. このとき, みかけの長さは $\overline{HH'}$ である. 屈折の法則より (近似を使う)

$$n_1 \theta_1 \doteq n_2 \theta_2, \quad n_1 \theta_1 \doteq n_3 \theta_3$$

$$\therefore \theta_2 = \frac{n_1}{n_2} \theta_1, \quad \theta_3 = \frac{n_1}{n_3} \theta_1 \quad \dots(4^*)$$

また, l は, 近似を用いて

$$l = d_1 \theta_1 + d_2 \theta_2 + d_3 \theta_3$$

(4*) より

$$= \frac{n_2 n_3 d_1 + n_3 n_1 d_2 + n_1 n_2 d_3}{n_2 n_3} \theta_1$$

したがって

$$\theta_1 = \frac{n_2 n_3 l}{n_2 n_3 d_1 + n_3 n_1 d_2 + n_1 n_2 d_3} \quad \dots(5^*)$$

(5*) を用いて, みかけの長さ $\overline{HH'}$ は

$$\overline{HH'} = (d_1 + d_2 + d_3) \tan \theta_1 \doteq (d_1 + d_2 + d_3) \theta_1$$

$$= \frac{n_2 n_3 (d_1 + d_2 + d_3)}{n_2 n_3 d_1 + n_3 n_1 d_2 + n_1 n_2 d_3} l$$

B 問1 $A'(a_x, -a_y)$ と $B(b_x, b_y)$ を結ぶ線分と x 軸との交点が反射点である. 直線 $A'B$ の式は

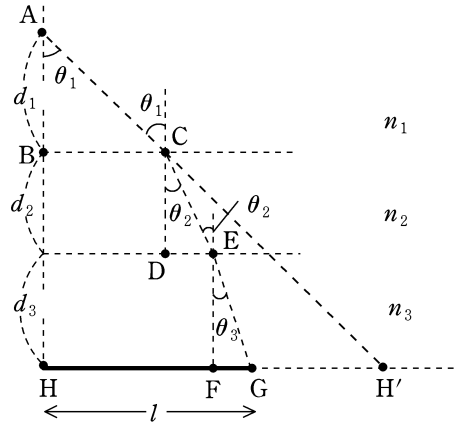
$$y = \frac{b_y - (-a_y)}{b_x - a_x} (x - a_x) - a_y$$

$y = 0$ のときの x は

$$\therefore x = \frac{a_x b_y + a_y b_x}{a_y + b_y}$$

問2 屈折率 n_1 における光の速さは $\frac{c}{n_1(\tau)}$. AO の距離が $\sqrt{a_x^2 + a_y^2}$ なので, 光が AO 間を進むのにかかる時間 t_1 は

$$t_1 = \frac{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{\frac{c}{n_1}} = \frac{n_1 \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{c} \quad (イ)$$



また、OB 間の距離が $\sqrt{b_x^2 + b_y^2}$ であり、屈折率 n_2 での光の速さは $\frac{c}{n_2}$ であるから、OB 間を進むのにかかる時間 t_2 は

$$t_2 = \frac{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2 \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}{c}$$

であるから、

$$t_1 + t_2 = \frac{n_1 \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{c} + \frac{n_2 \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}{c} \quad (\text{ウ})$$

AO', O'B 間の距離はそれぞれ

$$AO' = \sqrt{(a_x + \Delta x)^2 + a_y^2} \quad (\text{エ}), \quad O'B = \sqrt{(b_x - \Delta x)^2 + b_y^2} \quad (\text{オ})$$

$(\Delta x)^2 \doteq 0$ より

$$\begin{aligned} AO' &= \sqrt{a_x^2 + 2a_x \Delta x + a_y^2} = \sqrt{(a_x^2 + a_y^2) + 2a_x \Delta x} \\ &= \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \sqrt{1 + \frac{2a_x}{a_x^2 + a_y^2} \Delta x} \\ &\doteq \sqrt{a_x^2 + a_y^2} \cdot \left(1 + \frac{a_x}{a_x^2 + a_y^2} \Delta x\right) = \sqrt{a_x^2 + a_y^2} + \frac{a_x \Delta x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} \end{aligned}$$

したがって、AO' 間を進むにかかる時間 t'_1 は

$$t'_1 = \frac{AO'}{\frac{c}{n_1}} = \frac{n_1 \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}{c} + \frac{n_1 a_x \Delta x}{c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} = t_1 + \frac{n_1 a_x \Delta x}{c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}}$$

同様の計算をすると O'B 間の距離は $O'B = \sqrt{b_x^2 + b_y^2} - \frac{b_x \Delta x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$ だから、O'B 間を進む時間 t'_2 は

$$t'_2 = \frac{O'B}{\frac{c}{n_2}} = \frac{n_2 \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}{c} - \frac{n_2 b_x \Delta x}{c \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} = t_2 - \frac{n_2 b_x \Delta x}{c \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

以上から、

$$t'_1 + t'_2 = t_1 + t_2 + \frac{n_1 a_x \Delta x}{c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} - \frac{n_2 b_x \Delta x}{c \sqrt{b_x^2 + b_y^2}}$$

$\Delta t = (t'_1 + t'_2) - (t_1 + t_2)$ より

$$\begin{aligned} \therefore \Delta t &= \frac{n_1 a_x \Delta x}{c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} - \frac{n_2 b_x \Delta x}{c \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \\ \therefore \frac{\Delta t}{\Delta x} &= \frac{n_1 a_x}{c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} - \frac{n_2 b_x}{c \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \quad (\text{カ}) \end{aligned}$$

問いはここまでになっているが、 $\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0$ (極小をとる必要条件) のとき

$$\begin{aligned} \frac{n_1 a_x}{c \sqrt{a_x^2 + a_y^2}} - \frac{n_2 b_x}{c \sqrt{b_x^2 + b_y^2}} &= 0 \\ \therefore n_1 \times \frac{a_x}{\sqrt{a_x^2 + a_y^2}} &= n_2 \times \frac{b_x}{\sqrt{b_x^2 + b_y^2}} \end{aligned}$$

となり、確かに $n_1 \sin \theta_1 = n_2 \sin \theta_2$ の形になっている。

2022 年

2

問1 物体 A, B を対象としたつり合いの式より

$$kd_1 = 2mg$$

$$\therefore d_1 = \frac{2mg}{k} \quad \dots(*)$$

問2 つり合いの位置を原点としているので, 位置 $x (> 0)$ におけるばねの伸びは $x - d_1$ である. したがって, 弾性力 $-k(x - d_1)$ と, 重力 $-2mg$ がはたらく. 加速度を a としたときの物体 A, B を対象とした運動方程式は

$$2ma = -k(x - d_1) - 2mg$$

$$= -kx \quad (\because (*))$$

この運動方程式から, 周期は $2\pi\sqrt{\frac{2m}{k}}$ となる.

問3 つり合いの位置が振動の中心である. つり合いの位置から b だけ下げて静かにはなしているのだから, このはなした位置が振動の下端となる. 下端と中心の距離が b であるから, 振幅も b である. 問2 で得た運動方程式より, 位置 x , 速さ v の単振動のエネルギー保存

$$\frac{1}{2} \times 2m \times v^2 + \frac{1}{2} kx^2 = \text{一定}$$

が成り立つ. 単振動において, 中心にくるときが速さが最大になるときである. そこで, 下端と中心でこの保存則を立てる. 下端では $v = 0$ で, 中心での速さを v_{\max} として,

$$\frac{1}{2} \times 2m \times v_{\max}^2 = \frac{1}{2} kb^2$$

$$\therefore v_{\max} = b\sqrt{\frac{k}{2m}}$$

問4 B にはたらく力は $-mg - T$

問5 位置 x における加速度を a とすると, 物体 A, 物体 B の運動方程式は

$$\text{物体 A: } ma = -k(x - d_1) - mg + T \quad \dots(2*)$$

$$\text{物体 B: } ma = -mg - T \quad \dots(3*)$$

(2*), (3*) より ma を消去して, (*) も考慮し, T を求めると

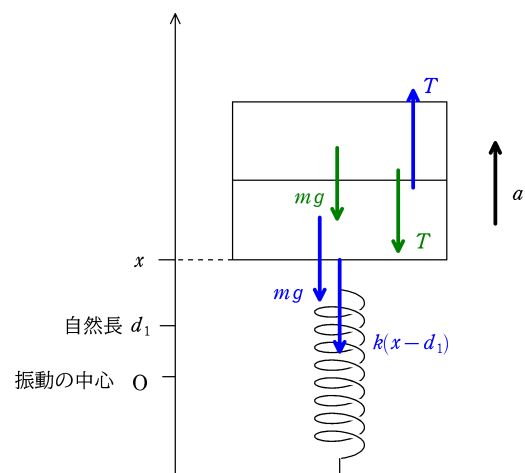
$$T = \frac{1}{2} kx - mg \quad \dots(4*)$$

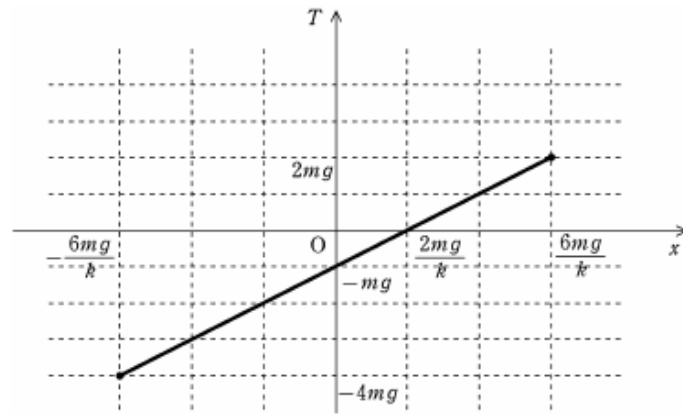
問6 次図

問7 問題文より, 離れる条件は $T \geq mg$ である. (4*) より

$$\frac{1}{2} kx - mg \geq mg$$

$$\therefore x \geq \frac{4mg}{k}$$





つり合いの位置 (原点) より b だけ下げて静かにはなしたので, 下端は $x = -b$ であり, 上端は $x = b$ である. 単振動をしている際, 運動の上端に達する前に離れればよいので

$$b \geq \frac{4mg}{k}$$

であり, $b_1 = \frac{4mg}{k}$

問 8 求める速さを v として, 下端 $x = -b$ と離れた場所 $x = \frac{4mg}{k}$ における単振動のエネルギー保存則を立てる. 離れた位置の速さを v として

$$\frac{1}{2} \times 2m \times v^2 + \frac{1}{2}k \left(\frac{4mg}{k} \right)^2 = \frac{1}{2}kb^2$$

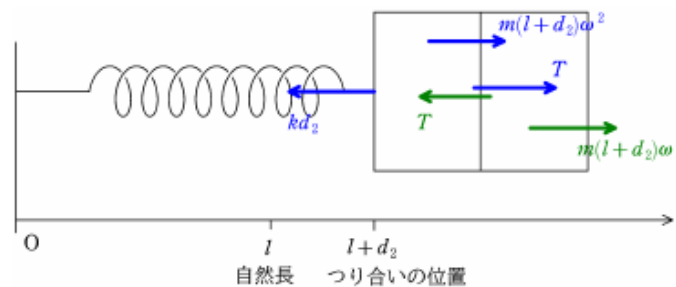
$$\therefore v = \sqrt{\frac{(kb + 4mg)(kb - 4mg)}{2mk}}$$

問 9 物体 A, B を対象とし, 物体 A, B とともに回転した観測者からみたつり合いの式を立てる. 物体 A, B にはたらく水平方向の力は O から離れる向きにはたらく大きさ $2m(l + d_2)\omega^2$ の遠心力と, O の向きにはたらく大きさ kd_2 の弾性力である. つり合いの式より

$$kd_2 = 2m(l + d_2)\omega^2$$

$$\therefore d_2 = \frac{2ml\omega^2}{k - 2m\omega^2}$$

問 10 B にはたらく力のつり合いを考える. (観測者は問 9 と同じ.)



$$T = m(l + d_2)\omega^2$$

離れない条件は $T < mg$ なので, 上式より

$$m(l + d_2)\omega^2 < mg$$

$d_2 = \frac{2ml\omega^2}{k - 2m\omega^2}$ であることも考慮して, ω について整理すると

$$\omega < \sqrt{\frac{kg}{kl + 2mg}}$$

4

A 問1 $F = k \frac{Q|q|}{d^2}$ *8

問2 $E_0 = \frac{1}{2}mv^2 + k \frac{Qq}{d}$ *9

問3 点電荷 P には常に O とは逆向きに力がはたらくので、面積速度が一定となる。点 P の速さが 0 になるとき、面積速度は 0 になるので、 $(d, 0)$ の地点で面積速度が 0 になる必要がある。このような θ は、 $\theta = 0$ または π である。 $\theta = 0$ のとき、速度の向きに力がはたらくので、速度の大きさも次第に大きくなるため、速度は 0 にならない。したがって、 $\theta = \pi$

また、力学的エネルギー保存則より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv^2 + k \frac{Qq}{d} &= 0 + k \frac{Qq}{r} \\ \therefore r &= \frac{2kQqd}{mdv^2 + 2kQq} \end{aligned}$$

問4 Q と q の電荷間の距離を r 、速さを v' とすると、力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv^2 + k \frac{Qq}{d} = \frac{1}{2}mv'^2 + k \frac{Qq}{r}$$

であり、 $v \leq v'$ になるのは、 $k \frac{Qq}{d} \geq k \frac{Qq}{r}$ 、つまり、 $d \leq r$ のときである。逆に、 $d > r$ は、中心が原点 O で半径 d の円内部に点電荷 P が進入するときである。この円内部に進入しないためには、 $0 \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ の向きに初速を与えればよい。

問5 速さが一定になるための必要条件は、打ち出したときにはたらく力が速度に垂直であることで、これは $\theta = \frac{\pi}{2}$ 。また、その後も速さが一定になるので、点電荷にはたらく力と速度の向きが常に垂直である。このとき、点電荷は静電気力を向心力とした等速円運動を行う。向心方向の運動方程式は

$$\begin{aligned} m \frac{v^2}{d} &= k \frac{Q|q|}{d^2} \\ \therefore v &= \sqrt{\frac{-kQq}{md}} \quad (\because q < 0) \end{aligned}$$

問6 $x < 0$, $0 < x < d$, $d < x$ それぞれの領域での電位を求める。

(i) $x < 0$ のとき

$$\begin{aligned} V(x) &= k \frac{Q}{|x|} + k \frac{-3Q}{|d-x|} \\ &= -\frac{kQ}{x} - \frac{3kQ}{d-x} \end{aligned}$$

また、 $\lim_{x \rightarrow -0} V(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow -\infty} V(x) = 0$ *10であり、 $V(x) = 0$ となる x は

$$\begin{aligned} -\frac{kQ}{x} - \frac{3kQ}{d-x} &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{d}{2} \end{aligned}$$

これは、 $x < 0$ を満たす。

(ii) $0 < x < d$ のとき

$$\begin{aligned} V(x) &= k \frac{Q}{|x|} + k \frac{-3Q}{|d-x|} \\ &= \frac{kQ}{x} - \frac{3kQ}{d-x} \end{aligned}$$

*8 この問いでは力の大きさを聞いている。 q の正負が不明なので、絶対値の記号をつける。

*9 こちらは位置エネルギーなので、 q に絶対値をとってはいけない。

*10 おおまかなグラフをかくときの目安にする。

また, $\lim_{x \rightarrow +0} V(x) = \infty$, $\lim_{x \rightarrow d-0} V(x) = -\infty$ であり, $V(x) = 0$ となる x は

$$\begin{aligned} \frac{kQ}{x} - \frac{3kQ}{d-x} &= 0 \\ \therefore x &= \frac{d}{4} \end{aligned}$$

これは, $0 < x < d$ を満たす.

(iii) $d < x$ のとき

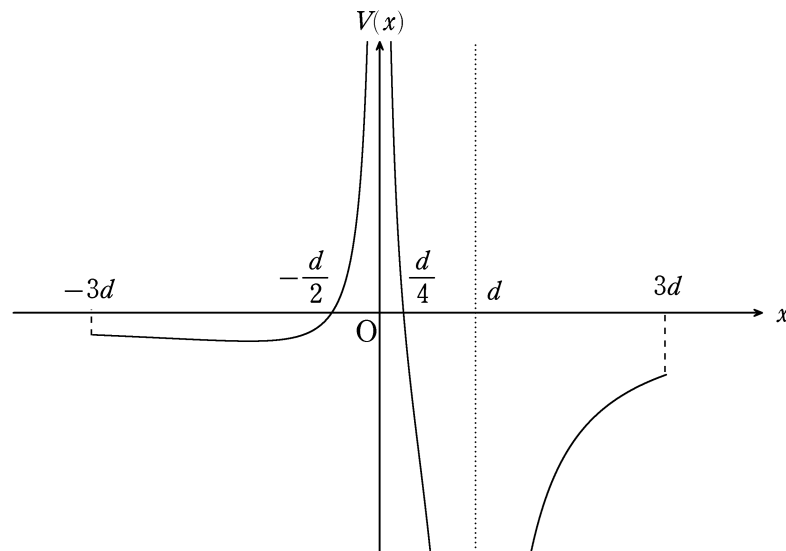
$$\begin{aligned} V(x) &= k \frac{Q}{|x|} + k \frac{-3Q}{|d-x|} \\ &= \frac{kQ}{x} + \frac{3kQ}{d-x} \end{aligned}$$

また, $\lim_{x \rightarrow d+0} V(x) = -\infty$, $\lim_{x \rightarrow \infty} V(x) = 0$ であり, $V(x) = 0$ となる x は

$$\begin{aligned} \frac{kQ}{x} + \frac{3kQ}{d-x} &= 0 \\ \therefore x &= -\frac{d}{2} \end{aligned}$$

これは, $d < x$ を満たさない.

以上より, $-3d \leq x \leq 3d$ のおおよそのグラフの概形は次のようになる.

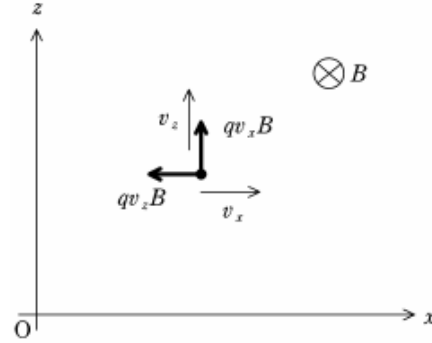


B 問1 原点において、 y 軸の正方向に大きさ qE の静電気力が、 y 軸の負の方向に大きさ qvB のローレンツ力がはたらく。これらの力が釣り合うと点電荷は x 軸上を等速直線運動する。つり合いの式より

$$qE = qvB$$

$$\therefore B = \frac{E}{v}$$

問2 静電気力はつねに、 y 軸の正の向きに大きさ qE がはたらく。また、 x 方向の速度成分と z 方向の速度成分のみがローレンツ力に関係する。図のように、 z 方向に $qv_x B$ のローレンツ力、 x 方向に $-qv_z B$ のローレンツ力がはたらくので、運動方程式は以下ようになる。



$$\begin{cases} x \text{ 成分} : ma_x = -qv_z B \\ y \text{ 成分} : ma_y = qE \\ z \text{ 成分} : ma_z = qv_x B \end{cases}$$

問3 ローレンツ力を向心力とした向心方向の運動方程式を立てると

$$m \frac{v^2}{R} = qvB$$

$$\therefore R = \frac{mv}{Bq}$$

また、円運動における速さと角速度の関係より

$$v = R\omega$$

$$\therefore \omega = \frac{v}{R} = \frac{Bq}{m}$$

問4 $x = R \sin \omega t$ に、 $x = d$. $t = T$ を代入し、与えられた近似式を用いると

$$d \doteq \frac{R\omega}{v} T$$

$$\therefore T = \frac{d}{v}$$

問5 y 方向は大きさ qE の静電気力を受け、加速度は $a_y = \frac{qE}{m}$ (=一定) で等加速度運動をする。したがって、時刻 T における Y は

$$Y = \frac{1}{2} \cdot \frac{qE}{m} \cdot T^2$$

また、 z 方向は、近似式を用いて

$$Z \doteq R \cdot \frac{1}{2} (\omega T)^2$$

問4の式とこれらをまとめると

$$\begin{cases} d = R\omega T \\ Y = \frac{qET^2}{2m} \\ Z = \frac{R\omega^2 T^2}{2} \end{cases}$$

であり、問3の $\omega = \frac{Bq}{m}$ より、 $k = \frac{q}{m} = \frac{\omega}{B}$ とおき、上の3つの式を変形すると

$$d = \frac{R}{\text{消したい}} k B \frac{T}{\text{消したい}} \quad \dots(*)$$

$$Y = \frac{1}{2} k E \frac{T^2}{\text{消したい}} \quad \dots(2*)$$

$$Z = \frac{1}{2} \frac{R}{\text{消したい}} k^2 B^2 \frac{T^2}{\text{消したい}} \quad \dots(3*)$$

以上(*), (3*)より R, T を消去して

$$k = \frac{2EZ^2}{d^2B^2Y}$$

5

問1 観測者が聞く振動数を f_1 とする。ドップラ-効果の式より

$$f_1 = \frac{V}{V-u} f$$

問2 観測者が観測する波長を λ_1 とする。問1の式において

$$f_1 = \frac{V}{\underbrace{V-u}_{\lambda_1}} f$$

より、 $\lambda_1 = \frac{V-u}{f}$

問3 音源が音を出す波の数と、観測者が観測する波の数は等しい。観測者が音を聞く時間を t_1 とすると

$$f_1 t_1 = f t$$

$$\therefore t_1 = \frac{f t}{f_1} = \frac{f t}{\frac{V}{V-u} f} = \frac{V-u}{V} t$$

問4 反射板が受け取る振動数を f_2 とすると、ドップラ-効果の式より

$$f_2 = \frac{V}{V-u} f$$

であり、反射板で反射された音を観測者が聞く振動数を f_3 とすると、反射板、観測者ともに静止しているため、ドップラ-効果は起こらずに、 $f_3 = f_2$ 。したがって、

$$f_3 = f_2 = \frac{V}{V-u} f$$

問5 音源が観測者を通り過ぎた後の観測者が音源から直接聞く音の振動数を f_4 とすると、ドップラ-効果の式より

$$f_4 = \frac{V}{V+u} f$$

であり、反射された音を観測者が聞く振動数は f_3 のままであるから、うなりの振動数は

$$|f_3 - f_4| = \frac{V}{V-u} f - \frac{V}{V+u} f$$

$$= \frac{2Vu}{V^2 - u^2} f$$

うなりの周期はこの逆数をとったもので

$$\frac{1}{|f_3 - f_4|} = \frac{V^2 - u^2}{2Vu f}$$

問6 反射板が観測する振動数を f_5 とする. ドップラー効果の式より

$$f_5 = \frac{V-w}{V-u} f$$

問7 観測者が反射板で反射された音を聞いたときの振動数を f_6 とする. ドップラー効果の式より

$$\begin{aligned} f_6 &= \frac{V}{V+w} f_5 \\ &= \frac{V}{V+w} \times \frac{V-w}{V-u} f \\ &= \frac{V(V-w)}{(V+w)(V-u)} f \end{aligned}$$

問8 観測者が音源から直接聞く音の振動数を f_4 である. うなりの振動数は

$$\begin{aligned} |f_4 - f_6| &= \left| \frac{V}{V+u} - \frac{V(V-w)}{(V+w)(V-u)} f \right| \\ &= \left| \frac{1}{V+u} - \frac{V-w}{(V+w)(V-u)} \right| Vf \\ &= \left| \frac{(V+w)(V-u) - (V-w)(V+u)}{(V+u)(V+w)(V-u)} \right| Vf \\ &= \frac{2|(w-u)V^2}{(V+w)(V+u)(V-u)} f \\ &= \frac{2(w-u)V^2}{(V+w)(V+u)(V-u)} f \quad (\because w > u) \end{aligned}$$

この逆数がうなりの周期なので

$$\frac{1}{|f_4 - f_6|} = \frac{(V+w)(V+u)(V-u)}{2(w-u)V^2 f}$$

問9 反射板が受け取る振動数を f_7 とすると, ドップラー効果の式より

$$f_7 = \frac{V+\alpha-w}{V+\alpha-u} f$$

また, 反射板によって反射された音を観測者が聞く振動数を f_8 として, ドップラー効果の式より

$$\begin{aligned} f_8 &= \frac{V-\alpha}{V-\alpha+w} f_7 \\ &= \frac{V-\alpha}{V-\alpha+w} \times \frac{V+\alpha-w}{V+\alpha-u} f \\ &= \frac{(V-\alpha)(V+\alpha-w)}{(V-\alpha+w)(V+\alpha-u)} f \end{aligned}$$

6

問1 A室の気体の物質量を n とする. 理想気体の状態方程式より

$$\begin{aligned} P_0 V_0 &= n R T_L \\ \therefore n &= \frac{P_0 V_0}{R T_L} \quad \dots(*) \end{aligned}$$

問2 ピストンが固定されているので, 定積変化である. 変化後の圧力を P_1 として, ボイル・シャルルの法則より

$$\begin{aligned} \frac{P_0 V_0}{T_L} &= \frac{P_1 V_0}{T_H} \\ \therefore P_1 &= \frac{T_H}{T_L} P_0 \quad \dots (2*) \end{aligned}$$

また, 熱力学第一法則より, A室が高温熱源から受け取った熱量 Q_1 は, 内部エネルギー変化に等しい. (*) も用いると,

$$\begin{aligned} Q_1 &= \frac{3}{2} n R (T_H - T_L) \\ &= \frac{3}{2} P_0 V_0 \left(\frac{T_H}{T_L} - 1 \right) \quad \dots(3*) \end{aligned}$$

問3 A室の気体は等温変化, B室の気体は断熱変化している. 変化後, ピストンはつり合っているので A, B 両気体の圧力は等しい. これを P_2 とおく. また, 変化後の A 室の気体の体積を V_A とする. さらに, A 室の初期状態において, やはりピストンがつり合っているため, A, B 両気体の圧力は P_0 で等しい. このときの B 室の気体の体積を V_B とすると, 変化後の体積は αV_B となる. A 室の気体においては, ボイルの法則を, B 室の気体においては, 初期状態と変化後においてポアソンの式を立てると

$$\text{A 室のボイルの法則:} \quad P_1 V_0 = P_2 V_A \quad \dots(4^*)$$

$$\text{B 室のポアソンの式:} \quad P_0 V_B^\gamma = P_2 \cdot (\alpha V_B)^\gamma \quad \dots(5^*)$$

(5*) より

$$P_2 = \alpha^{-\gamma} P_0 \quad \dots(6^*)$$

(2*), (4*), (6*) より,

$$\begin{aligned} V_A &= \frac{P_1}{P_2} V_0 = \frac{\frac{T_H}{T_L} P_0}{\alpha^{-\gamma} P_0} V_0 \\ &= \alpha^\gamma \frac{T_H}{T_L} V_0 \quad \dots(7^*) \end{aligned}$$

問4 A室は等温変化している. 内部エネルギー変化が0であるから, 熱力学第一法則より, A室の気体が高温熱源から受け取った熱量 Q_2 は, 気体がした仕事に等しい. また, 問題文によれば, 等温変化の際, 体積を V_1 から V_2 に変化した際の気体がした仕事は $nRT\{f(V_1) - f(V_2)\}$ となることから, 途中 (*), (7*) を用いて,

$$\begin{aligned} Q_2 &= nRT_H \{f(V_0) - f(V_A)\} \\ &= P_0 V_0 \cdot \frac{T_H}{T_L} \left\{ f(V_0) - f\left(\alpha^\gamma \frac{T_H}{T_L} V_0\right) \right\} \quad \dots(8^*) \end{aligned}$$

問5 ピストンを固定して十分時間が経過するまでの間に低温熱源から受け取った熱量を Q_3 , 低温熱源を接触させたまま, 初期状態に戻すまでに低温熱源から受け取った熱量を Q_4 とする.

(i) Q_3 について

ピストンを固定しているので定積変化である. 熱力学第一法則より, Q_3 は内部エネルギー変化に等しいので, 途中 (*) も用いて

$$\begin{aligned} Q_3 &= \frac{3}{2} nR(T_L - T_H) \\ &= -\frac{3}{2} \cdot P_0 V_0 \left(\frac{T_H}{T_L} - 1 \right) \quad \dots(9^*) \end{aligned}$$

(ii) Q_4 について

常に T_L の熱源が接触しているため等温変化である. 熱力学第一法則より, Q_4 は気体がした仕事に等しいから,

$$\begin{aligned} Q_4 &= nRT_L \{f(V_A) - f(V_0)\} \\ &= -P_0 V_0 \left\{ f(V_0) - f\left(\alpha^\gamma \frac{T_H}{T_L} V_0\right) \right\} \quad \dots(10^*) \end{aligned}$$

(9*), (10*) より, 求める熱量 $Q_3 + Q_4$ は

$$Q_3 + Q_4 = -P_0 V_0 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{T_H}{T_L} - 1 \right) + \left\{ f(V_0) - f\left(\alpha^\gamma \frac{T_H}{T_L} V_0\right) \right\} \right] \quad \dots(11^*)$$

問6 (3*), (8*), (11*) より, 熱効率 e は

$$\begin{aligned}
 e &= \frac{Q_1 + Q_2 + Q_3 + Q_4}{Q_1 + Q_2} \\
 &= \frac{\frac{3}{2}P_0V_0\left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) + P_0V_0 \cdot \frac{T_H}{T_L} \left\{f(V_0) - f\left(\alpha^{\gamma} \frac{T_H}{T_L} V_0\right)\right\}}{\frac{3}{2}P_0V_0\left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) + P_0V_0 \cdot \frac{T_H}{T_L} \left\{f(V_0) - f\left(\alpha^{\gamma} \frac{T_H}{T_L} V_0\right)\right\} - P_0V_0 \left[\frac{3}{2} \left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) + \left\{f(V_0) - V\left(\alpha^{\gamma} \frac{T_H}{T_L} V_0\right)\right\} \right]} \\
 &= \frac{\left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) \left\{f(V_0) - f\left(\alpha^{\gamma} \frac{T_H}{T_L} V_0\right)\right\}}{\frac{3}{2} \left(\frac{T_H}{T_L} - 1\right) + \frac{T_H}{T_L} \left\{f(V_0) - f\left(\alpha^{\gamma} \frac{T_H}{T_L} V_0\right)\right\}}
 \end{aligned}$$

2021 年

1

問1 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore \quad v_0 = d\sqrt{\frac{k}{d}} \quad (\because v_0 > 0)$$

問2 振動の周期 T は, $T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ ^{*11}である. 求める時間は, 周期の $\frac{1}{4}$ なので, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

問3 0

問4 運動量保存則^{*12}より

$$0 = mv_1 + MV_1 \quad \therefore \quad \frac{V_1}{v_1} = -\frac{m}{M} \quad \dots \quad (*)$$

問5 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}mv_1^2 + \frac{1}{2}MV_1^2 \quad \dots \quad (2*)$$

$$(*), (2*) \text{ と, } V < 0^{*13} \text{ を考慮して, } v_1 = d\sqrt{\frac{Mk}{m(M+m)}}, V_1 = -d\sqrt{\frac{mk}{M(M+m)}}$$

問6 ばねが最も伸びたとき, 台に対する小球の速度が0になる. すなわち, 小球と台の速度が同じになる. その速度を V とすれば, 運動量保存則より

$$0 = (M+m)V \quad \therefore \quad V = 0$$

問7 問6も考慮して, 力学的エネルギー保存則を立てる. 最大の伸びを $d_{\max} (> 0)$ とすると,

$$\frac{1}{2}kd^2 = \frac{1}{2}kd_{\max}^2 \quad \therefore \quad d_{\max} = d$$

問8 自然長を原点とし, 位置 $x (-d \leq x < 0)$ に小球がある場合の台とストッパー A の間の垂直抗力の大きさを N とすると, 台の水平方向のつり合いの式より

$$N = kx$$

この式より, $x = 0$ のとき, 垂直抗力が0になり, 動き出す. 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}kd^2 \quad \therefore \quad v_2 = d\sqrt{\frac{k}{m}}$$

問9 問2と同様に, $\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}$

^{*11} 自然長を原点として, 小球が位置 x にあるときの加速度を a とすると, 運動方程式は,

$$ma = -kx$$

である. したがって, 角振動数は $\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$ なので, 振動の周期は, $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ となる.

^{*12} 台と小球にはたらく水平方向の力はばねによる力のみで, その和が0になるから, 運動量が保存する.

^{*13} 台の初速度は0であり, はじめて自然長になるまでは, 常に負の方向に力を受けているので, 速度は負となる.

問10 ばねが最も伸びたとき、小球と台の速度は同じとなる。運動量保存則より

$$mv_2 = (M + m)v_3 \quad \therefore \quad \frac{v_3}{v_2} = \frac{m}{M + m} \quad \dots \quad (3^*)$$

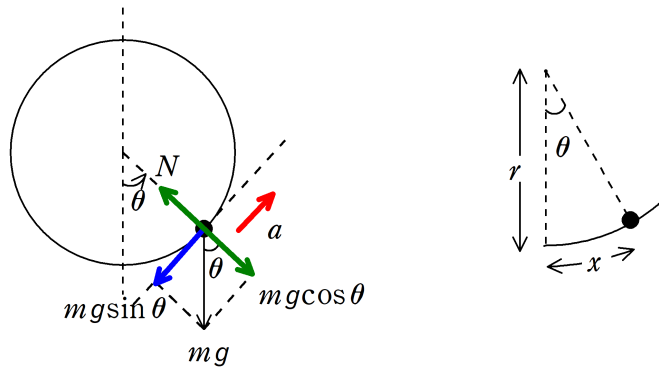
問11 ばねの伸びの最大値を A とする。力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_2^2 = \frac{1}{2}(M + m)v_3^2 + \frac{1}{2}kA^2 \quad \dots \quad (4^*)$$

$$(3^*), (4^*) \text{ と問8の結果より, } A = d\sqrt{\frac{M}{M + m}}$$

2

問1 運動方程式を立てて、 $ma = -mg \sin \theta$



問2 Bから接線方向の変位を x とすると、 $x = r\theta$ 。問1において、 $\sin \theta \cong \theta = \frac{x}{r}$ として

$$ma = -mg \cdot \frac{x}{r} = -\frac{mg}{r}x$$

より*14, 角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{g}{r}}$ の単振動をするので、求める周期 T は

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\frac{r}{g}}$$

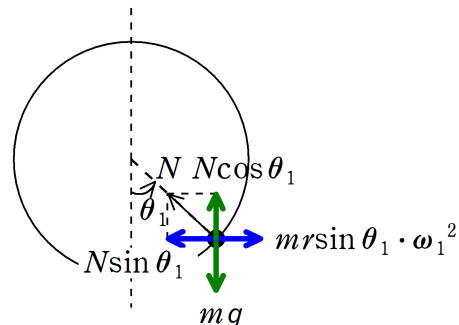
問3 Aにおける運動エネルギーが0のときの力学的エネルギー保存則を立てる。

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgr \quad \therefore \quad v_0 = \sqrt{2gr}$$

問4 角度 θ_1 における円軌道の半径は $r \sin \theta_1$ なので、リングとともに回転する観測者からみたときに大きさ $m \cdot (r \sin \theta_1) \cdot \omega_1^2$ の遠心力がはたらく。リ

ングと小球にはたらく抗力の大きさを N として、リングとともに回転する観測者からみた小球の水平方向と鉛直方向のつり合いの式より

$$\begin{aligned} N \sin \theta_1 &= mr\omega_1^2 \sin \theta_1 \\ N \cos \theta_1 &= mg \end{aligned}$$



以上2式より、 N を消去して、 $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta_1}}$

*14 リングと小球の間の抗力の大きさを N とし、角度 θ における水平方向の運動方程式と鉛直方向のつり合いの式を立てると

$$ma = -N \sin \theta$$

$$mg = N \cos \theta \cong N$$

$\sin \theta = \frac{x}{r}$ と、この2式より

$$ma = -mg \cdot mg \cdot \frac{x}{r}$$

とすることもできる。

問5 小球の速さは $r \sin \theta_1 \cdot \omega_1$ *15 なので, 力学的エネルギー E は

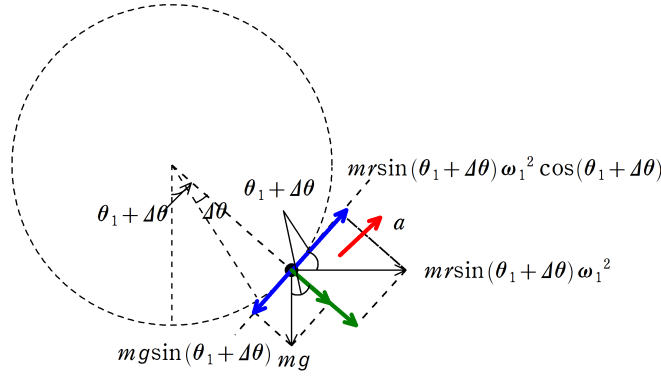
$$E = \frac{1}{2} m (r \sin \theta_1 \omega_1)^2 + mg \cdot (-r \cos \theta_1)$$

問4の結果を代入して

$$E = \frac{1}{2} mgr \left(\frac{\sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} - 2 \cos \theta_1 \right)$$

問6 $\cos \theta < 1$ と問4の結果より $\sqrt{\frac{g}{r}} < \omega$ したがって, $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{r}}$

問7 角度 $\theta_1 + \Delta\theta_1$ における接線方向の力は次図. 接線方向の加速度を a として, 運動方程式を立てると



$$ma = mr\omega_1^2 \sin(\theta_1 + \Delta\theta) \cos(\theta_1 + \Delta\theta) - mg \sin(\theta_1 + \Delta\theta) \quad \dots(*)$$

ところで, $\sin(\theta_1 + \Delta\theta) \doteq \sin \theta_1 + \Delta\theta \cos \theta_1$ *16, $\cos(\theta_1 + \Delta\theta) \doteq \cos \theta_1 - \Delta\theta \sin \theta_1$ *17 より, $\sin(\theta_1 + \Delta\theta) \cos(\theta_1 + \Delta\theta) \doteq \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \Delta\theta \sin^2 \theta_1 + \Delta\theta \cos^2 \theta_1$ *18. さらに, 問4より, $\omega_1 = \sqrt{\frac{g}{r \cos \theta_1}}$ を代入して(*)の式は

$$\begin{aligned} ma &\doteq mr\omega_1^2 (\sin \theta_1 \cos \theta_1 - \Delta\theta \sin^2 \theta_1 + \Delta\theta \cos^2 \theta_1) - mg(\sin \theta_1 + \Delta\theta \cos \theta_1) \\ &= -mg \frac{\sin^2 \theta_1}{\cos \theta_1} \Delta\theta \end{aligned}$$

また, θ_1 からの変位を x とすれば, $x = r\Delta\theta$ より

$$ma \doteq -\frac{mg \sin^2 \theta_1}{r \cos \theta_1} x$$

*15 半径 r , 角速度の大きさ ω の円運動の速さ v は次の関係がある.

$$v = r\omega$$

*16 加法定理と与えられた近似式 $\sin(\Delta\theta) \doteq \Delta\theta$, $\cos(\Delta\theta) \doteq 1$ を使うと

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 + \Delta\theta) &= \sin \theta_1 \cos(\Delta\theta) + \cos \theta_1 \sin(\Delta\theta) \\ &\doteq \sin \theta_1 + \Delta\theta \cos \theta_1 \end{aligned}$$

*17 同様に,

$$\begin{aligned} \cos(\theta_1 + \Delta\theta) &= \cos \theta_1 \cos(\Delta\theta) - \sin \theta_1 \sin(\Delta\theta) \\ &\doteq \cos \theta_1 - \Delta\theta \sin \theta_1 \end{aligned}$$

*18 上記の近似式と $(\Delta\theta)^2 \doteq 0$ より

$$\begin{aligned} \sin(\theta_1 + \Delta\theta) \cos(\theta_1 + \Delta\theta) &\doteq (\sin \theta_1 + \Delta\theta \cos \theta_1)(\cos \theta_1 - \Delta\theta \sin \theta_1) \\ &= \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \Delta\theta \sin^2 \theta_1 + \Delta\theta \cos^2 \theta_1 - (\Delta\theta)^2 \sin \theta_1 \cos \theta_1 \\ &\doteq \sin \theta_1 \cos \theta_1 - \Delta\theta \sin^2 \theta_1 + \Delta\theta \cos^2 \theta_1 \end{aligned}$$

この運動方程式より、小球はリングとともに回転する観測者からみると、角振動数 $\Omega = \sqrt{\frac{g \sin^2 \theta_1}{r \cos \theta}}$ の単振動をする。このときの周期 τ は

$$\tau = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sin \theta_1} \sqrt{\frac{r \cos \theta_1}{g}}$$

3

A 問1 $\Phi_0 = \pi r^2 B_0$ *¹⁹

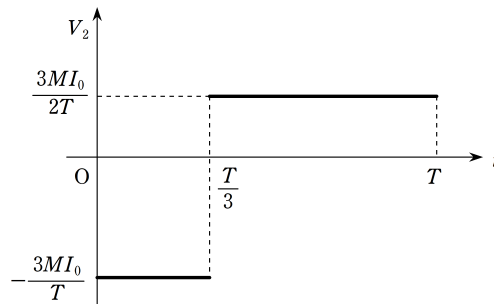
問2 図2のグラフより、 $\frac{\Delta B}{\Delta t} = -\frac{B_0}{t_0}$ 。したがって、 $\Delta B = -\frac{B_0}{t_0} \Delta t$ より

$$\Delta \Phi = \pi r^2 \Delta B = -\frac{\pi r^2 B_0}{t_0} \Delta t$$

問3 レンツの法則*²⁰より、 $0 < t < t_0$ の間、aよりbの方が高電位になるので、誘導起電力は正。また、誘導起電力の大きさ*²¹は、

$$V = + \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right| = \frac{\pi r^2 B_0}{t_0}$$

B 問 $t_1 = \frac{1}{3}T$ のとき、図4より、 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}T$ と $\frac{1}{3}T \leq t \leq T$ の $I_1 - t$ グラフの傾きの絶対値は、それぞれ $\frac{3I_0}{T}$ 、 $\frac{3I_0}{2T}$ である。 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}T$ では、端子cに対して端子dの電位の方が低く、 $\frac{1}{3}T \leq t \leq T$ では、端子cに対して端子dの方が電位が高い。*²²したがって、 $0 \leq t \leq \frac{1}{3}T$ と $\frac{1}{3}T \leq t \leq T$ それぞれの誘導起電力は $-\frac{3MI_0}{T}$ 、 $\frac{3MI_0}{2T}$ となる。*²³



*¹⁹ 磁束密度 B が面積 S の面に垂直に貫くときの磁束 Φ は

$$\Phi = BS$$

*²⁰ 上向きの磁束が減少しているため、上向きの磁束を作るように電流を流そうとする。

*²¹ 時間 Δt の間に、磁束が $\Delta \Phi$ 変化した際に1巻きコイルに生じる誘導起電力の大きさ V は、

$$V = \left| \frac{\Delta \Phi}{\Delta t} \right|$$

*²² $0 \leq t \leq \frac{1}{3}T$ の範囲では、コイル1がつくる磁束は上方向に増加しているため、コイル2では、これを減らすように起電力をつくる。右ねじの法則を用いれば、cの方向が高電位となる。一方、 $\frac{1}{3}T \leq t \leq T$ の範囲では、コイル1がつくる上方向の磁束が減少している。コイル2は上方向に磁束を増加させるように起電力をつくる。右ねじの法則を用いれば、dが高電位となる。

*²³ コイルAとコイルBの相互インダクタンスを M とする。時間 Δt の間に、コイルAの電流が ΔI 変化したとき、コイルBに生じる相互誘導起電力の大きさ V は

$$V = \left| \frac{\Delta I}{\Delta t} \right|$$

C 問1 コイル2に生じる誘導起電力の大きさは、 $M \frac{I_0}{t_1}$ であるから、消費電力は P_1 *²⁴は

$$P_1 = \frac{\left(M \frac{I_0}{t_1}\right)^2}{R} = \frac{M^2 I_0^2}{R_2 t_1^2}$$

問2 問1の消費電力は $0 < t < t_1$ において時間によらず一定である。したがって、求めるジュール熱 Q_1 は

$$Q_1 = \frac{M^2 I_0^2}{R_2 t_1^2} \cdot t_1 = \frac{M^2 I_0^2}{R_2 t_1}$$

問3 時刻 $t_1 < t < T$ における誘導起電力の大きさは、 $M \frac{I_0}{T-t_1}$ であるから、消費電力 P_2 は

$$P_2 = \frac{\left(M \frac{I_0}{T-t_1}\right)^2}{R_2} = \frac{M^2 I_0^2}{R_2 (T-t_1)^2}$$

また、 $t_1 < t < T$ で発生するジュール熱 Q_2 は

$$Q_2 = P_2 (T-t_1) = \frac{M^2 I_0^2}{R_2 (T-t_1)}$$

したがって、 $0 < t < T$ の間に生じるジュール熱 Q は

$$\begin{aligned} Q &= Q_1 + Q_2 \\ &= \frac{M^2 I_0^2}{R_2 t_1} + \frac{M^2 I_0^2}{R_2 (T-t_1)} \\ &= \frac{M^2 I_0^2}{R_2} \cdot \frac{T}{-\left(t_1 - \frac{T}{2}\right)^2 + \frac{T^2}{4}} \end{aligned}$$

したがって、 $t_1 = \frac{T}{2}$ のとき、 Q の最小値は*²⁵

$$Q = \frac{M^2 I_0^2}{R_2} \cdot \frac{T}{\frac{T^2}{4}} = \frac{4M^2 I_0^2}{R_2 T}$$

4

A 問1 ダイオードは p 型から n 型に流れるので、**スイッチは b 側に接続する**。また、回路に 0.030A の電流が流れるので、図 1(b) の電流-電圧特性のグラフを読み取って、ダイオードにかかる電圧は 2.0V。電源電圧が 6.5V なので、抵抗 R にかかる電圧は $6.5 - 2.0 = 4.5V$ 。オームの法則より、抵抗 R の抵抗値 R は

$$\begin{aligned} 4.5 &= 0.030 \times R \\ \therefore R &= 1.5 \times 10^2 \Omega \end{aligned}$$

問2 ダイオードに流れる電流を $I[A]$ 、かかる電圧を $V[V]$ とする。電圧降下の式より

$$3.0 - 1.5 \times 10^2 \cdot I - V = 0$$

この式を図 1(b) のグラフに書き込み、交点を読み取ると、流れる電流は $1.0 \times 10^{-2} A$

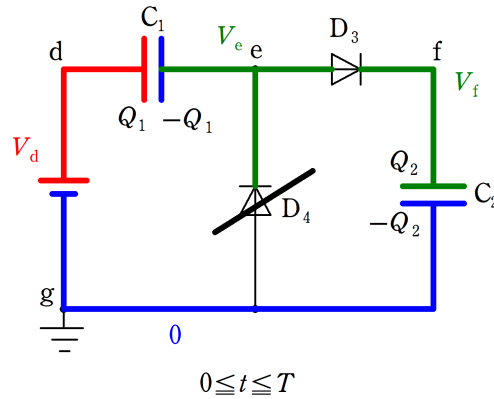
B 問1 $0 \leq t \leq \frac{T}{2}$ の間、e から f に向かって電流が流れる。*²⁶

*²⁴ 抵抗値 R の抵抗に流れる電流が I 、かかる電圧が V のとき、抵抗で消費する電力 P は

$$P = IV = I^2 R = \frac{V^2}{R}$$

*²⁵ t_1 を変数とみて、それ以外の文字は定数とみる。分母が最大になるとき、 Q が最小となる。

*²⁶ d の電位が高くなると、 C_1 の電荷の絶対値が大きくなるように、e から f に向かって電流が流れる。ダイオード D_3 は順方向なので、電流が流れるが、g に対して e の電位が高いため、 D_4 には電流が流れない。



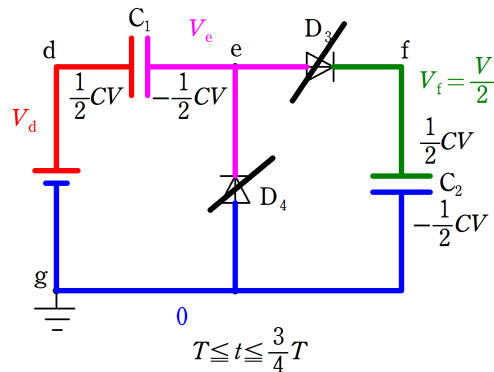
図のように電荷が設定されているとき、電荷保存則より

$$-Q_1 + Q_2 = 0 \quad \dots (*)$$

また、 $V_d = V$, $V_e = V_f = V_1$ として、 C_1 , C_2 のコンデンサーの式より

$$Q_1 = C(V - V_1), Q_2 = CV_1 \quad \dots (2*)$$

(*), (2*) より $V_1 = \frac{1}{2}V$, $Q_1 = Q_2 = \frac{1}{2}CV$



問2 $t = T$ の直後から V_d が下がり、 f から e に電流が流れようとするが、逆方向となるため、 D_3 に電流は流れない。また、しばらくは、 g に対して e の方が電位が高いため、 D_4 にも電流は流れない。したがって、コンデンサー C_1 , C_2 ともに電荷の移動がない。電荷の移動がないため、コンデンサーの電圧は問1での $\frac{V}{2}$ を維持するように、 e の電位が変化していく。そのため、 e での電位が0になるとき、 d の電位は $\frac{V}{2}$ となる。 $T \leq t$ の範囲ではじめて $V_d = \frac{V}{2}$ になるのは、 $t_A = \frac{5}{4}T$ のとき。

問3 問2で考察した結果より、 $0 < t < T$ のとき、(イ)。 $T < t < t_A$ のとき、(エ)。

問4 t_A 直後より、 g より e の電位が低くなるため D_4 に電流が流れ始める。^{*27} $t = \frac{5}{2}T$ において、 d の電位が $-V$ であり、 e の電位は g とつながっているため電位は0。したがって、 e 側の電気量は CV

問5 $\frac{5}{2}T$ 以降 d の電位が上昇し、 e から f に電流が流れようとするが、逆方向のため D_3 , D_4 に電流は流れず、 C_1 の電荷は変化しない。そのため、 C_1 の電圧はしばらく V で維持する。その後 e の電位が $\frac{V}{2}$ になったところで、 D_3 に電流が流れ始める。^{*28}このときの d の電位は $-\frac{V}{2}$ で、時刻は $t_B = \frac{11}{4}T$ 。

問6 図のように、 $t = \frac{11}{4}T$ と、 $t = 4T$ において、電荷保存則を立てる。

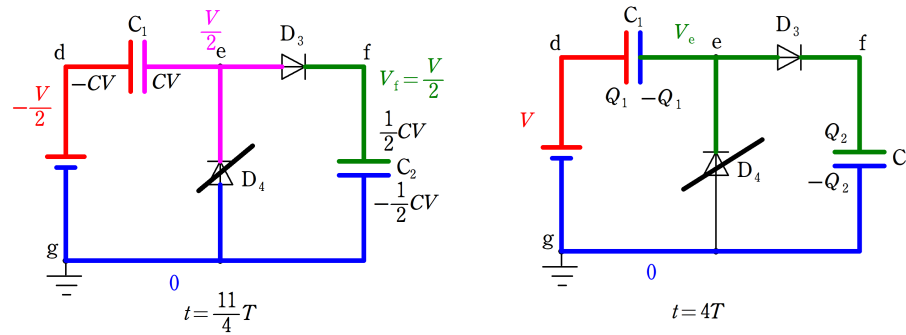
$$CV + \frac{1}{2}CV = -Q_1 + Q_2 \quad \dots (3*)$$

さらに、コンデンサーの式を立てて、

$$Q_1 = C(V - V_e), Q_2 = CV_e \quad \dots (4*)$$

^{*27} D_3 には電流は流れない。

^{*28} $t \leq T$ 以降、 D_3 には電流が流れていなかったため、 C_2 の電荷 j は移動せず、 f の電位は常に $\frac{V}{2}$ を維持していた。 e の電位が f の電位を超えたポイントで D_3 に電流が流れる。



(3*), (4*) を解いて, $V_e = V_2 = \frac{5}{4}V$

問 7 $T \leq t \leq 4T$ の間で行った操作は, 図 3 を用いて次のようにまとめられる.

- (i) スイッチ S_1 を開いて, S_2 を閉じ, d の電位を $-V$ として, C_1 を充電する.
- (ii) その後 S_2 を開き, S_1 を閉じて d の電位を V として充電する.

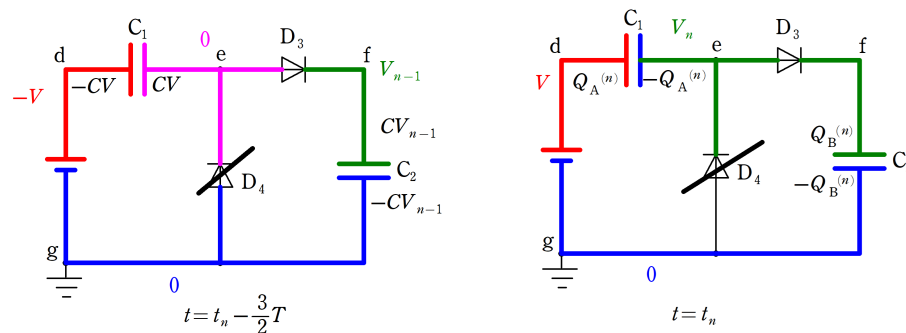
$t = t_n - \frac{3}{2}T$ においては, C_2 は, $t = t_{n-1}$ の時点で蓄えられていた CV_{n-1} があり, C_1 には d の電位を $-V$, e の電位を 0 とした d 側が $-CV$, e 側が CV の電荷が蓄えられている. この後, e と f の電位が等しくなる時刻より D_3 に電流が流れる. $t = t_n$ において, d の電位は V , e の電位は V_n となっている. $t = t_n$ のときに C_1, C_2 に蓄えられている電荷をそれぞれ $Q_A^{(n)}, Q_B^{(n)}$ として, 電荷保存則より

$$CV + CV_{n-1} = -Q_A^{(n)} + Q_B^{(n)} \quad \dots \quad (5^*)$$

$t = t_n$ におけるコンデンサーの式より

$$Q_A^{(n)} = C(V - V_n), Q_B^{(n)} = CV_n \quad \dots \quad (6^*)$$

(5*), (6*) より, $V_n = \frac{1}{2}V_{n-1} + V$ の関係を得る.



問 8 問 7 で得た漸化式を解くと, $V_n = 2V - \frac{3}{2}V \left(\frac{1}{2}\right)^{n-1}$ なので, $V_\infty = 2V$

5

問 1 状態 I における気体の圧力を p_1 , 絶対温度を T_1 とする. ピストンのつり合いの式より

$$p_1 S = p_0 S + mg \quad \therefore \quad p_1 = p_0 + \frac{mg}{S}$$

はじめの状態と状態 I において, ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_1 V_0}{T_1} \quad \therefore \quad T_1 = \frac{p_1}{p_0} T_0 = \left(1 + \frac{mg}{p_0 S}\right) T_0$$

問 2 状態 II における気体の圧力を p_2 , 絶対温度を T_2 とする. ピストンのつり合いの式より

$$p_2 S = p_0 S + (M + m)g \quad \therefore \quad p_2 = p_0 + \frac{M + m}{S} g$$

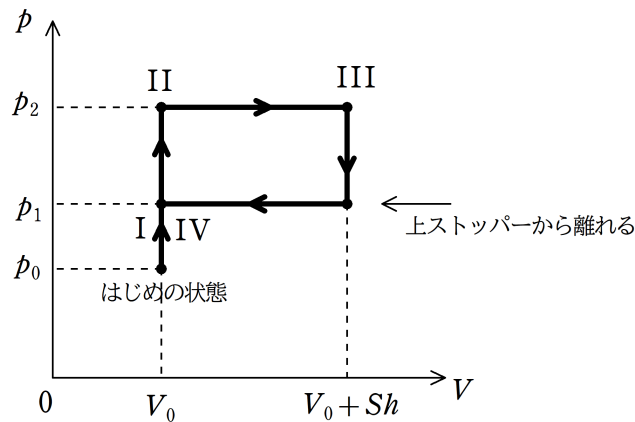
はじめの状態と状態 II において、ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_2}{V_0} T_2 \quad \therefore \quad T_2 = \frac{p_2}{p_0} T_0 = \left\{ 1 + \frac{(M+m)g}{p_0 S} \right\} T_0$$

問 3 状態 II から状態 III では、ピストンにはたらく力の情報が変化せず、定圧変化となる。状態 III における圧力を p_3 とすると、 $p_3 = p_2 = p_0 + \frac{M+m}{S}g$ 。また、絶対温度を T_3 とする。はじめの状態と状態 III におけるボイル・シャルルの法則より

$$\frac{p_0 V_0}{T_0} = \frac{p_3 (V_0 + Sh)}{T_3}$$

$$\therefore \quad T_3 = \frac{p_3 (V_0 + Sh)}{p_0 V_0} T_0 = \left\{ 1 + \frac{(M+m)g}{p_0 S} \right\} \left(1 + \frac{Sh}{V_0} \right) T_0$$



問 4 縦軸を圧力 p 、横軸を体積 V とした、 pV 図をかくと、上のようになる^{*29}。 pV 図の長方形で囲まれた部分の面積は状態 I から IV のサイクルで気体がした仕事 W と等しいので

$$W = (p_2 - p_1)Sh = Mgh^{*30}$$

問 5 内部エネルギー変化 ΔU_{12} ^{*31} は

$$\Delta U_{12} = \frac{3}{2}(p_2 V_0 - p_1 V_0) = \frac{3MgV_0}{2S}$$

問 6 内部エネルギー変化 ΔU_{23} は

$$\Delta U_{23} = \frac{3}{2}\{p_3(V_0 + Sh) - p_2 V_0\} = \frac{3}{2}\{p_0 S + (M+m)g\}h$$

6

問 1 球面の中心 O' と O を結ぶ線分に Q から垂線を引き、その交点を H とする。直角三角形 $O'OH$ について三平方の定理の式を立てて

$$(R-d)^2 + r^2 = R^2 \quad \therefore \quad d = R - \sqrt{R^2 - r^2} \quad (\because R > d)$$

^{*29} 状態 III から荷物をおろすと、気体がピストンをおす力とピストンの重さでは気がおす力の方が大きくなるため、上ストッパーからピストンに垂直抗力がはたらく。(pV 図における状態点の位置は変化しない。) その後、温度を下げるとともに、気体の圧力が下がり、それとともに、上ストッパーがピストンをおす力の大きさも小さくなる。気体の圧力が p_1 となったときに、気体がピストンをおす力とピストンのおもさがつり合い、ピストンが下降をはじめ。やがて、ピストンが下ストッパーに到達し、状態 I にもどる。(状態 IV)

^{*31} 単原子分子理想気体において、圧力 p_1 、体積 V_1 、絶対温度 T_1 の状態から、圧力 p_2 、体積 V_2 、絶対温度 T_2 に変化したときの内部エネルギー変化 ΔU は、物質量を n (一定とする。), 気体定数を R として

$$\Delta U = \frac{3}{2}nR(T_2 - T_1) = \frac{3}{2}(p_2 V_2 - p_1 V_1)$$

問2 問1の結果より

$$\begin{aligned} d &= R - R\sqrt{1 - \left(\frac{r}{R}\right)^2} \\ &\doteq R - R\left\{1 - \frac{1}{2}\left(\frac{r}{R}\right)^2\right\} \\ &= \frac{r^2}{2R} \end{aligned}$$

したがって, $A = \frac{1}{2R}$

問3 Qでは自由端反射し, Pでは固定端反射し, 位相が π ずれる. したがって, 明線条件は

$$\frac{2\pi}{\lambda} \cdot 2d + \pi = 2\pi m^{*32} \quad \therefore \quad d = \frac{1}{2}m\lambda - \frac{1}{4}\lambda$$

したがって, $B = \frac{1}{2}\lambda, C = -\frac{1}{4}\lambda$

問4 問2と問3の結果より

$$\begin{aligned} \frac{r^2}{2R} &= \frac{1}{2}m\lambda - \frac{1}{4}\lambda \\ r &= \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R\lambda} \quad \dots \quad (*) \end{aligned}$$

ちなみに, A を用いて表すのであれば, $r = \sqrt{\frac{2m-1}{4A}}\lambda$ となる.

問5 平凸レンズからはなした距離を x とするときの明線条件は

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda}(2d + 2x) + \pi &= 2\pi m \\ \therefore \quad r' &= \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R\lambda - 2Rx} \quad \dots \quad (2*) \end{aligned}$$

(*), (2*) より, $m = 1$ のとき, $r' = \frac{r}{2}$ の条件を考えて

$$\sqrt{\frac{1}{2}R\lambda - 2Rx} = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{1}{2}R\lambda} \quad \therefore \quad x = \frac{3}{16}\lambda$$

問6 題意より, (*) に $m = l$ を代入したときの r と (2*) に $m = l + 1$ を代入したときの r' が等しい^{*33}ので

$$\begin{aligned} \sqrt{\left(l - \frac{1}{2}\right)R\lambda} &= \sqrt{\left(l + 1 - \frac{1}{2}\right)R\lambda - 2Rx} \\ \therefore \quad x &= \frac{\lambda}{2}^{*34} \end{aligned}$$

問7 Pでは固定端反射し, Qでは自由端反射するので, 反射による位相のずれは π である. また, PQ間での波長が $\frac{\lambda}{n}$ になることから, (*)において, $\lambda \rightarrow \frac{\lambda}{n}$ とすればよい. すなわち

$$r = \sqrt{\left(m - \frac{1}{2}\right)R \cdot \frac{\lambda}{n}}$$

半径が最小である $m = 1$ は $\sqrt{\frac{R\lambda}{2n}}$. A を用いるのであれば, $\sqrt{\frac{\lambda}{4nA}}$

問8 Oにおける光路差による位相差はない. つまり, 反射による位相差によってOが明るくなるか暗くなるかが決まる.

以後, PはOにおける平面ガラス上部の点でQはOにおける平凸レンズの下部の点とする. (問9も同様)

^{*33} (2*) によれば, x が大きくなるほど r' は小さくなっていく. つまり, x の増加とともに, 明輪の半径が小さくなっていく. 問題では, 1つ外側 ($m = l + 1$) の半径が $m = l$ の位置にきたときの x をきいている.

(i) $n > n_0$ のとき

P では自由端反射, Q では固定端反射をし, 反射による位相差は π となるから, O は暗くなる. したがって,
(ア)

(ii) $1 < n < n_0$ のとき P では固定端反射, Q では自由端反射をし, 反射による位相差は π となるから, O は暗くなる. したがって, (ア)

問 9 下側から見たときは光が屈折せずに透過する光と, P で反射しさらに Q で反射した光との干渉を考える. やはり O での光路差による位相差はない. したがって, 反射による位相差が O における明暗の決め手となる.

(i) $n > n_0$ のとき

透過光における位相のずれはない. また, 反射光においては, P で自由端反射, Q で自由端反射をするので, 位相差はない. したがって, O では明るい. (イ)

(ii) $1 < n < n_0$ のとき

透過光における位相のずれはない. また, 反射光においては, P で固定端反射, Q で固定端反射をするので, 位相 2π ずれる. したがって, O では明るい. (イ)

2020 年

1

問1 $O_A P_A$ 間において、力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_A^2 = mgh \quad \therefore v_A = \sqrt{2gh}$$

問2 $P_A Q_A$ 間には水平方向に力ははたらかないので、等速度運動する。したがって

$$t_A = \frac{L}{v_A} = \frac{L}{\sqrt{2gh}}$$

問3 斜面下向き方向の運動方程式より

$$ma_A = mg \sin \theta \quad \therefore a_A = g \sin \theta$$

問4 三角比を考えて

$$\tan \theta = \frac{h}{\frac{L}{2}} \quad \therefore h = \frac{L}{2} \tan \theta$$

問5 対称性より、 $P_B R$ 間を移動する時間と $R Q_B$ 間を移動する時間は同じである。そこで、 t_B は $P_B R$ 間を移動する時間を2倍したものとする。 $O_B R$ において、 R での速さを v_R とし、力学的エネルギー保存則を立てると

$$\frac{1}{2}mv_R^2 = mg \times 2h \quad \therefore v_R = 2\sqrt{gh}$$

P_B での速度は問1より、 $\sqrt{2gh}$ であるから、 $P_B R$ 間にかかる時間を t とし、等加速度運動の速度の式を立てると

$$2\sqrt{gh} = \sqrt{2gh} + g \cdot (\sin \theta) \cdot t \quad \therefore t = \frac{(2 - \sqrt{2})}{\sin \theta} \sqrt{\frac{h}{g}}$$

問4で得た、 $h = \frac{1}{2}L \tan \theta$ を代入して

$$\begin{aligned} t_B = 2t &= \frac{2(2 - \sqrt{2})}{\sin \theta} \sqrt{\frac{h}{g}} \\ &= \frac{2(2 - \sqrt{2})}{\sin \theta} \sqrt{\frac{L \tan \theta}{2g}} \\ &= 2(2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{L}{g \sin 2\theta}} \end{aligned}$$

問6 問4より、 $L = \text{一定}$ のもとで θ を変化させたとき、 t_B が最小になるのは、 $\sin 2\theta = 1$ 、つまり、 $\theta_0 = 45^\circ$ のとき。

問7 問5のとき、 $t_B = 2(2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{L}{g}}$ である。また、問2の結果において、 $h = \frac{1}{2}L \tan 45^\circ = \frac{1}{2}L$ を代入して

$$t_A = \frac{L}{\sqrt{2g \cdot \frac{1}{2}L}} = \sqrt{\frac{L}{g}}$$

したがって

$$\begin{aligned} \frac{t_B}{t_A} &= \frac{2(2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{L}{g}}}{\sqrt{\frac{L}{g}}} \\ &= 2(2 - \sqrt{2}) = 2(2 - 1.414) = 1.172 \approx \mathbf{1.17} \end{aligned}$$

問8 問2の結果において、 $h = \frac{1}{2}L \tan \theta$ を代入して、

$$t_A = \frac{L}{\sqrt{2g \cdot \frac{1}{2}L \tan \theta}} = \sqrt{\frac{L}{g \tan \theta}}$$

$t_B < t_A$ より

$$2(2 - \sqrt{2}) \sqrt{\frac{L}{g \sin 2\theta}} < \sqrt{\frac{L}{g \tan \theta}}$$
$$\therefore 2(\sqrt{2} - 1) < \cos \theta (< 1)$$

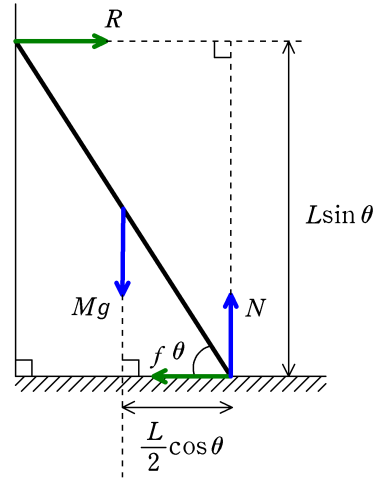
2

問1 Bにおける垂直抗力の大きさを R , Aにおける静止摩擦力と垂直抗力の大きさを f, N とする.

水平方向・鉛直方向のつり合いの式と A まわりの力のモーメントのつり合いの式より

$$\begin{cases} R = f \\ N = Mg \\ \frac{L}{2} \cos \theta \times Mg = L \sin \theta \times R \end{cases}$$

これらを解いて, $f = R = \frac{Mg}{2 \tan \theta}, N = Mg$



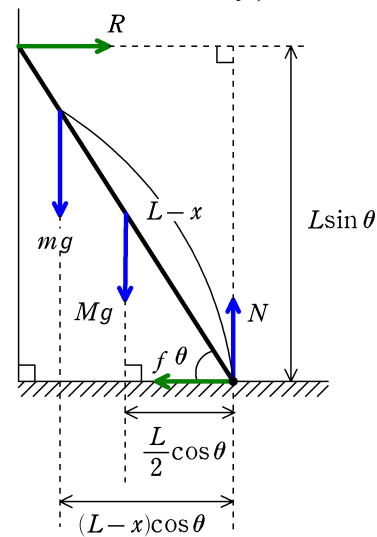
問2 静止している条件より

$$\begin{aligned} f &< \mu N \\ \therefore \frac{Mg}{2 \tan \theta} &< \mu Mg \\ \therefore \frac{1}{2 \tan \theta} &< \mu \end{aligned}$$

問3 同じく, Bにおける垂直抗力の大きさを R , Aにおける静止摩擦力と垂直抗力の大きさを f, N とする. おもりの重力の作用線と A との距離が $(L-x) \cos \theta$ であることに注意して, 水平方向・鉛直方向のつり合いの式と A まわりの力のモーメントのつり合いの式より

$$\begin{cases} R = f \\ N = Mg + mg \\ \frac{L}{2} \cos \theta \times Mg + (L-x) \cos \theta \times mg = L \sin \theta \times R \end{cases}$$

これらを解いて, $N = (M+m)g, f = R = \frac{\{ML + 2m(L-x)\}g \cos \theta}{2L \sin \theta}$



問4 静止している条件より

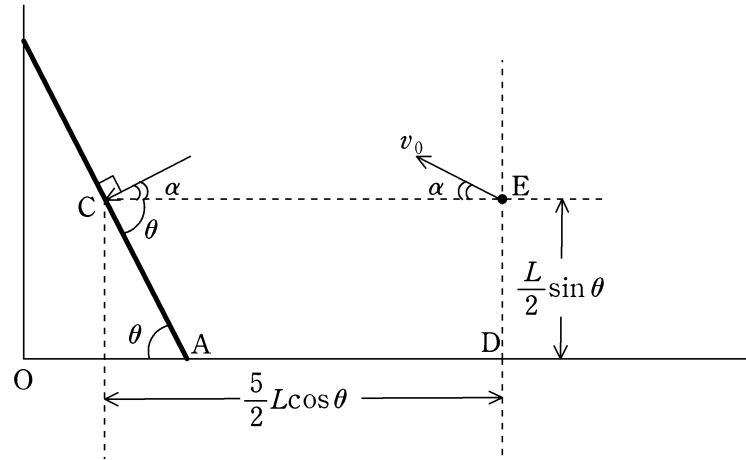
$$\begin{aligned} f &< \mu N \\ \frac{\{ML + 2m(L-x)\}g \cos \theta}{2L \sin \theta} &< \mu (M+m)g \\ \therefore \frac{\{ML + 2m(L-x)\} \cos \theta}{2(M+m)L \sin \theta} &< \mu \end{aligned}$$

問5 小球を E より水平に α の角度で投げ上げたとする. すると, 対称性から, 水平より α の角度で C とぶつかる. 小球は C で棒と垂直に衝突することから

$$\alpha + \theta = 90^\circ \quad \therefore \alpha = 90^\circ - \theta$$

問6 $CE = \frac{5}{2}L \cos \theta$ である. また, E における初速の大きさを v_0 とする. E から投げ上げてから最高点に達する時刻を t とする. 鉛直上向きを正とし, 鉛直方向の等加速度運動の速度の式より

$$0 = v_0 \sin(90^\circ - \theta) + (-g) \times t \quad \therefore t = \frac{v_0 \cos \theta}{g}$$

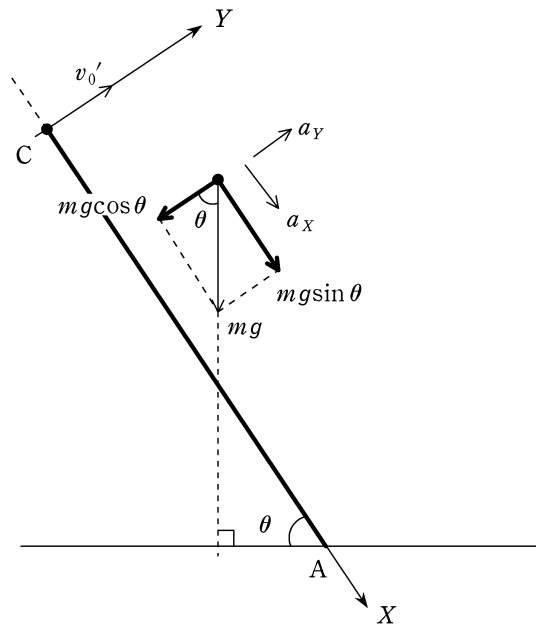


等加速度運動の対称性より、E から C に達する時間は $2t = \frac{2v_0 \cos \theta}{g}$ 。小球には水平方向に力がはたらかないため、水平速度は一定である。したがって、距離と速さと時間の関係より

$$\begin{aligned} \frac{5L}{2} \cos \theta &= v_0 \cos(90^\circ - \theta) \times \frac{2v_0 \cos \theta}{g} \\ \therefore v_0^2 &= \frac{5gL}{4 \sin \theta} \end{aligned}$$

$$v_0 > 0 \text{ より, } v_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{5gL}{\sin \theta}}$$

問7 C を原点として、C → A の方向に X 軸、X 軸から垂直な方向に Y 軸をとる。小球が C と衝突した直後の X 方向の速度は 0 である。Y 方向の速度は v'_0 とおく。



小球が空中にあるときに X, Y 方向それぞれの加速度を a_X, a_Y として、運動方程式を立てると

$$\begin{cases} ma_X = mg \sin \theta \\ ma_Y = -mg \cos \theta \end{cases} \\ \therefore a_X = g \sin \theta, \quad a_Y = -g \cos \theta$$

$Y = 0$ にもどってくる時間を τ とする。Y 方向の等加速度運動の変位の式より

$$\begin{aligned} 0 &= v'_0 \tau - \frac{1}{2} (g \cos \theta) \tau^2 = 0 \\ \therefore \tau \left(v'_0 - \frac{1}{2} g \tau \cos \theta \right) &= 0 \end{aligned}$$

$\tau \neq 0$ より, $\tau = \frac{2v'_0}{g \cos \theta}$. さらに, $X = \frac{L}{2}$ のときの時間も τ であるから, X 方向の等加速度運動の変位の式より

$$\begin{aligned} \frac{L}{2} &= 0 \times \frac{2v'_0}{g \cos \theta} + \frac{1}{2} \times (g \sin \theta) \times \left(\frac{2v'_0}{g \cos \theta} \right)^2 \\ \therefore v'_0 &= \frac{\cos \theta}{2} \sqrt{\frac{gL}{\sin \theta}} \end{aligned}$$

棒は衝突直前後で動かないとして, 反発係数 e とは, 衝突直前後の相対速度の大きさの比であることから,

$$e = \frac{v'_0}{v_0} = \frac{\frac{\cos \theta}{2} \sqrt{\frac{gL}{\sin \theta}}}{\frac{1}{2} \sqrt{\frac{5gL}{\sin \theta}}} = \frac{\cos \theta}{\sqrt{5}}$$

問 8 問 7 より, $v'_0 = \frac{\cos \theta}{\sqrt{5}} v_0$ であるから, 衝突直前後の運動エネルギーの差をとって,

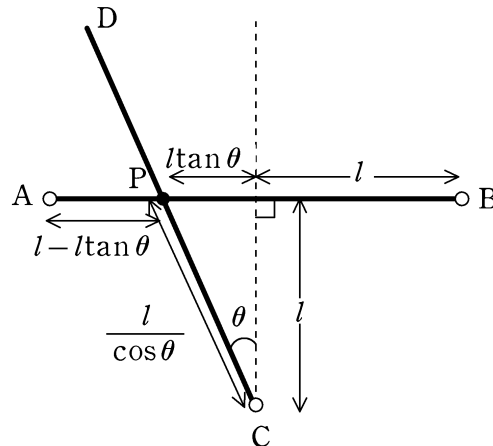
$$\begin{aligned} \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m (v'_0)^2 &= \frac{1}{2} m v_0^2 - \frac{1}{2} m \times \left(\frac{\cos \theta}{\sqrt{5}} v_0 \right)^2 = \frac{1}{2} m v_0^2 \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{5} \right) \\ &= \frac{1}{2} \times \frac{5mgL}{4 \sin \theta} \times \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{5} \right) \\ &= \frac{5mgL}{8 \sin \theta} \left(1 - \frac{\cos^2 \theta}{5} \right) \end{aligned}$$

3

A

問1 図より, $AP = (1 - \tan \theta)l$, $PB = (1 + \tan \theta)l$, $CP = \frac{l}{\cos \theta}$ であり, 単位長さあたりの抵抗が r であるから,

$$R_1 = (1 - \tan \theta)lr, \quad R_2 = (1 + \tan \theta)lr, \quad R_3 = \frac{l}{\cos \theta}r$$



問2 $I = 0$ なので, R_3 間の電圧は 0. したがって, R_1 間の電圧は V_2 である.
抵抗 R_1 に流れる電流を i とすると, オームの法則

より

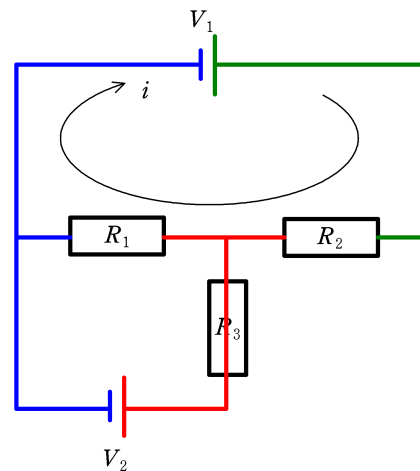
$$V_2 = R_1 i \quad \dots(*)$$

また, R_3 に電流が流れないことから, R_1 と R_2 には同じ電流 i が流れる. 図の矢印の向きに電圧降下の式を考えて

$$V_1 - R_2 i - R_1 i = 0 \quad \therefore V_1 = (R_1 + R_2) i \quad \dots(2*)$$

$$\theta = 30^\circ \text{ のとき, } R_1 = \left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)lr, \quad R_2 = \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)lr \text{ であり, } (*), (2*) \text{ から}$$

$$\begin{aligned} \frac{V_2}{V_1} &= \frac{R_1 i}{(R_1 + R_2) i} = \frac{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)lr}{\left(1 - \frac{1}{\sqrt{3}}\right)lr + \left(1 + \frac{1}{\sqrt{3}}\right)lr} \\ &= \frac{1 - \frac{1}{\sqrt{3}}}{2} = \frac{3 - \sqrt{3}}{6} \end{aligned}$$

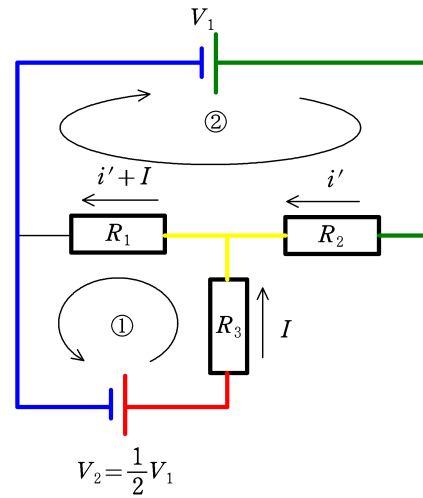


問3 右図のように i' を設定する. ①, ② まわりのキルヒホッフ則 (電圧降下の式) より

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : \frac{1}{2}V_1 - R_3I - R_1(i' + I)R_1 &= 0 \\ \textcircled{2} : V_1 - R_2i' - R_1(i' + I) &= 0 \end{aligned}$$

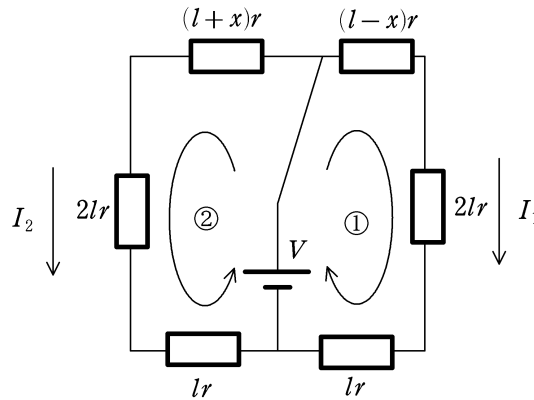
以上2式より、 i' を消去して、 I を求めると

$$I = \frac{R_2 - R_1}{2(R_1R_2 + R_2R_3 + R_3R_1)}V_1$$



B

問1 3 のはじめの説明に「細い抵抗線と、電気抵抗が無視できる細い導体棒を用いた回路…」と書かれているので、導体棒の抵抗が0であることに注意して回路をかくと、次のようになる。



図の①、②の方向のキルヒホッフ則(電圧降下の式)より

$$\begin{aligned} \textcircled{1} : V - (l-x)rI_1 - 2lrI_1 - lrI_1 &= 0 \quad \therefore I_1 = \frac{V}{(4l-x)r} \\ \textcircled{2} : V - (l+x)rI_2 - 2lrI_2 - lrI_2 &= 0 \quad \therefore I_2 = \frac{V}{(4l+x)r} \end{aligned}$$

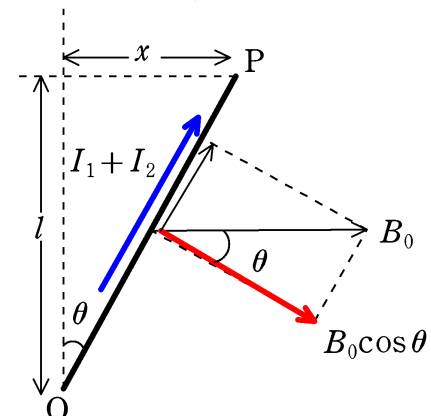
問2 $P \rightarrow A \rightarrow D \rightarrow Q$ の合成抵抗は $(4l-x)r$ で、ここにかかる電圧は V 。 $P \rightarrow B \rightarrow C \rightarrow Q$ の合成抵抗は $(4l+x)r$ でかかる電圧は V である。したがって、コイル全体で消費される電力は

$$\frac{V^2}{(4l-x)r} + \frac{V^2}{(4l+x)r} = \frac{8lV^2}{(4l-x)(4l+x)r}$$

問3 棒 OP に流れる電流に垂直な磁束密度の成分は、 y 軸と棒 OP とのなす角を θ とすると、 $B_0 \cos \theta$ である。

$\cos \theta = \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}}$ より、 $B_0 \cos \theta = \frac{B_0 l}{\sqrt{x^2 + l^2}}$ 。
 OP 間に流れる電流の大きさは、 $I_1 + I_2 = \frac{8lV}{(4l-x)(4l+x)r}$ である。また、 OP 間の長さは $\sqrt{x^2 + l^2}$ であるから、電磁力の大きさは

$$(I_1 + I_2) \times \frac{B_0 l}{\sqrt{x^2 + l^2}} \times \sqrt{x^2 + l^2} = \frac{8l^2 V B_0}{(4l-x)(4l+x)r}$$



問4 図3(a)と(b)は、電流の大きさと導体棒の長さが同じなので、電磁力の大きさが等しいのは、電流に垂直な磁束密度の成分の大きさが等しいときで

ある。したがって、

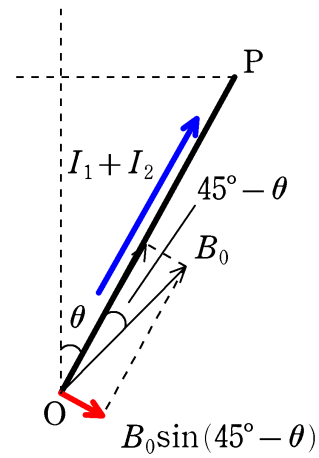
$$B_0 \cos \theta = \overbrace{B_0 \sin(45^\circ - \theta)}^{\text{加法定理で展開}}$$

$$\cos \theta = \sin 45^\circ \cos \theta - \cos 45^\circ \sin \theta$$

$\cos \theta = \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}}$, $\sin \theta = \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$ を代入して
整理すると

$$\frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} = \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{l}{\sqrt{x^2 + l^2}} - \frac{1}{\sqrt{2}} \times \frac{x}{\sqrt{x^2 + l^2}}$$

$$\therefore x = -(\sqrt{2} - 1)l$$



4

A

問1 $+Q$ が P_1, P_2 間につくる電場の大きさは $\frac{Q}{2\epsilon_0 S}$ ^{*35}であり, 向きは図1の下向き. 同じく, $-Q$ が P_1, P_2 間につくる電場の大きさは $\frac{Q}{2\epsilon_0 S}$ で向きが下向きであるから,

$$E_0 = \frac{Q}{2\epsilon_0 S} + \frac{Q}{2\epsilon_0 S} = \frac{Q}{\epsilon_0 S}$$

問2 静電エネルギーの式より,

$$U_Q = \frac{1}{2} QV$$

問3 電荷が変化していないので, 電場は変化しない. したがって, 電場と電位差の関係より

$$V' = E_0(d + \Delta d)$$

問4 静電エネルギー変化は, $V = E_0 d$ であることを考慮して

$$\begin{aligned} \Delta U_Q &= \frac{1}{2} Q(V' - V) \\ &= \frac{1}{2} Q\{E_0(d + \Delta d) - E_0 d\} = \frac{1}{2} QE_0 \Delta d \end{aligned}$$

問5 静電エネルギー変化は外力がした仕事に等しい. 外力の大きさを F とすると, 外力がする仕事は $F\Delta d$. これが問4の結果と等しいことから

$$\begin{aligned} F\Delta d &= \frac{1}{2} QE_0 \Delta d \\ \therefore F &= \frac{1}{2} QE_0 \end{aligned}$$

また, 外力と静電気力の大きさが等しいので

$$F_Q = F = \frac{1}{2} QE_0$$

B

問1 弾性力と静電気力 $\frac{1}{2} QE_0$ が釣り合うときを考えて

$$kx = \frac{1}{2} QE_0 \quad \therefore x = \frac{QE_0}{2k}$$

問2 図4(b)について, 蓄えられた電荷を Q_x とする. コンデンサーの基本式より

$$Q_x = \epsilon_0 \frac{S}{d-x} V_0$$

このとき, 電場の強さ E_x は

$$E_x = \frac{Q_x}{\epsilon_0 S} = \frac{V_0}{d-x}$$

したがって, 静電気力の大きさは

$$\frac{1}{2} Q_x E_x = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2(d-x)^2}$$

静電気力は図4(b)の右方向に, 弾性力は左方向にはたらく. したがって, $F(x)$ は

$$F(x) = \frac{\epsilon_0 S V_0^2}{2(d-x)^2} - kx$$

^{*35} ガウスの法則で導出してもよいが, 十分広い平面に一樣に分布する電荷がつくる電場の大きさは覚えておいてもよい.

問3 $F(x) = 0$ のとき

$$\frac{\varepsilon_0 S V_0^2}{2(d-x)^2} - kx = 0$$
$$\therefore V_0^2 = \frac{\varepsilon_0 S}{2k} \times x(d-x)^2$$

ここで、 $x(d-x)^2$ は $x = \frac{d}{3}$ で最大になることから、 $x = \frac{d}{3}$ のときに $V_0 = V_m$ とすると

$$V_m^2 = \frac{2k}{\varepsilon_0 S} \times \frac{d}{3} \cdot \frac{4}{9} d^2$$
$$\therefore V_m = \frac{2}{3} d \sqrt{\frac{2kd}{3\varepsilon_0 S}}$$

5

問1 ピストンのつり合いを考えると、単原子分子理想気体の圧力は p_0 である。理想気体の状態方程式より

$$p_0 \times Sl = nRT_0 \quad \therefore T_0 = \frac{p_0 Sl}{nR}$$

また、内部エネルギー^{*36}は

$$U = \frac{3}{2} p_0 Sl$$

問2 温度が一定であり、物質量が変化しないので、ボイルの法則より

$$p_1 \times S(l + x_1) = p_0 \times Sl \quad \therefore p_1 = \frac{l}{l + x_1} p_0$$

問3 ピストンには図の左方向に大気が押す力 $p_0 S$ と、弾性力 kx_1 が、右方向に単原子分子理想気体が押す力 $p_1 S$ と外力 F_1 がはたらく。問2より、 $p_1 S = \frac{l}{l + x_1} p_0 S$ なので

$$F_1 + p_1 S = p_0 S + kx_1$$

$$\therefore F_1 = \frac{x_1}{l + x_1} p_0 S + kx_1$$

問4 ピストンには図の左方向に大気が押す力 $p_0 S$ と、弾性力 kx_2 が、右方向に単原子分子理想気体が押す力 $p_2 S$ がはたらく。ピストンのつり合いの式より

$$p_2 S = p_0 S + kx_2 \quad \therefore p_2 = p_0 + \frac{kx_2}{S}$$

問5 ボイル・シャルルの法則より

$$\frac{p_0 Sl}{T_0} = \frac{p_2 S(l + x_2)}{aT_0}$$

$$\therefore a = \frac{p_2(l + x_2)}{p_0 l} = \frac{\left(p_0 + \frac{kx_2}{S}\right)(l + x_2)}{p_0 l}$$

$$= \frac{(p_0 S + kx_2)(l + x_2)}{p_0 Sl}$$

問6 気体がした仕事を W とする。ピストンとばねについて、力学的エネルギー変化は非保存力がする仕事に等しいことから

$$\overbrace{\frac{1}{2} kx_2^2 - 0}^{\text{弾性力による位置エネルギー変化}} = W + \overbrace{(-p_0 Sx_2)}^{\text{大気がする仕事}}$$

$$\therefore W = \frac{1}{2} kx_2^2 + p_0 Sx_2$$

また、内部エネルギー変化 ΔU は

$$\Delta U = \frac{3}{2} nR(aT_0 - T_0)$$

$$= \frac{3}{2} \times nR \left(\frac{(p_0 S + kx_2)(l + x_2)}{p_0 Sl} - 1 \right) \times \frac{p_0 Sl}{nR}$$

$$= \frac{3}{2} kx_2^2 + \frac{3}{2} (p_0 S + kl)x_2$$

^{*36} 単原子分子理想気体の内部エネルギー U は物質量を n モル、絶対温度を T 、気体定数を R とすると

$$U = \frac{3}{2} nRT$$

と表すことができるが、圧力を p 、体積を V として、状態方程式 $pV = nRT$ より

$$U = \frac{3}{2} nRT = \frac{3}{2} pV$$

とも表すことができる。受験物理では後者もよく使うので覚えておくとよい。

熱力学第一法則より

$$\begin{aligned} Q_2 &= \Delta U + W \\ &= \frac{3}{2} kx_2^2 + \frac{3}{2} (p_0 S + kl) x_2 + \frac{1}{2} kx_2^2 + p_0 S x_2 \\ &= \mathbf{2kx_2^2 + \frac{1}{2} (5p_0 S + 3kl) x_2} \end{aligned}$$

6

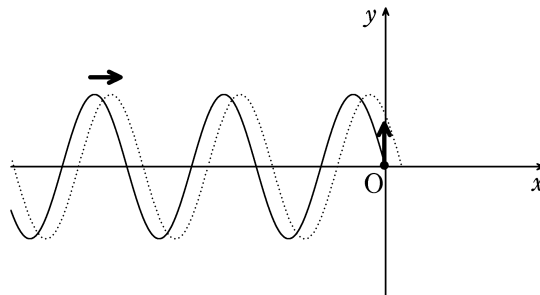
問1 図より、時間 t_1 の間に波は $\frac{3}{4}\lambda$ だけ進んでいるので、距離と速さと時間の関係より、

$$v = \frac{\frac{3}{4}\lambda}{t_1} = \frac{3\lambda}{4t_1}$$

また、波の基本式より振動数 f は

$$v = f\lambda \quad \therefore f = \frac{v}{\lambda} = \frac{3}{4t_1}$$

問2 点Oの媒質は $t = 0$ で $y = 0$ にあり、次の瞬間 $y > 0$ に変位する。点Oの媒質は sin 型の単振動をする。角振動数 $\omega = 2\pi f = 2\pi \times \frac{3}{4t_1}$ より



$$y = a \sin\left(2\pi \times \frac{3}{4t_1} \times t\right) = a \sin\left\{2\pi \left(\frac{3t}{4t_1}\right)\right\}$$

位置 x の媒質の振動は時間 $\frac{x}{v} = \frac{4t_1 x}{3\lambda}$ 前の点Oの媒質の振動と等しい。したがって

$$\begin{aligned} y &= a \sin\left\{\frac{2\pi \times 3}{4t_1} \left(t - \frac{4t_1 x}{3\lambda}\right)\right\} \\ &= a \sin\left\{2\pi \left(\frac{3t}{4t_1} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} \quad \dots(*) \end{aligned}$$

また、波が点Aに到着する時刻は $t = \frac{x_A}{v} = \frac{4t_1 x_A}{3\lambda}$ であるから、これを上式に代入して

$$\begin{aligned} y &= a \sin\left\{2\pi \left(\frac{3}{4t_1} \times \frac{4t_1 x_A}{3\lambda} - \frac{x}{\lambda}\right)\right\} \\ &= a \sin\left\{2\pi \left(\frac{x_A - x}{\lambda}\right)\right\} \end{aligned}$$

また、OよりBで反射して位置 x にくるまでの道のりは $2x_B - x$ であり、波が伝わるまでの時間は $\frac{2x_B - x}{v} = \frac{4t_1(2x_B - x)}{3\lambda}$ である。Bにおいて位相が π ずれることに注意して、 x での反射波による変位 y は

$$\begin{aligned} y &= a \sin\left\{2\pi \times \frac{3}{4t_1} \left(t - \frac{4t_1(2x_B - x)}{3\lambda}\right) + \pi\right\} \\ &= a \sin\left\{2\pi \left(\frac{3t}{4t_1} - \frac{2x_B - x}{\lambda}\right) + \pi\right\} \end{aligned}$$

反射波の先端がAにたどりつく時刻はO \rightarrow B \rightarrow Aの道のりが $2x_B - x_A$ なので、 $\frac{2x_B - x_A}{v} = \frac{4t_1(2x_B - x_A)}{3\lambda}$ である。これを代入して

$$\begin{aligned} y &= a \sin\left\{2\pi \left(\frac{3}{4t_1} \times \frac{4t_1(2x_B - x_A)}{3\lambda} - \frac{2x_B - x}{\lambda}\right) + \pi\right\} \\ &= a \sin\left\{2\pi \left(\frac{x - x_A}{\lambda}\right) + \pi\right\} \end{aligned}$$

ここで, $\sin(\theta + \pi) = -\sin\theta = \sin(-\theta)$ を用いると

$$y = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{\mathbf{x}_A - \mathbf{x}}{\lambda} \right) \right\}$$

$y_2 = a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{x_A - x}{\lambda} \right) \right\}$ とする. また, (*) に $t = \frac{4t_1(2x_B - x_A)}{3\lambda}$ を代入して入射波の変位を y_1 とすると

$$\begin{aligned} y_1 &= a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{3}{4t_1} \times \frac{4t_1(2x_B - x_A)}{3\lambda} - \frac{x}{\lambda} \right) \right\} \\ &= a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{2x_B - x_A - x}{\lambda} \right) \right\} \end{aligned}$$

合成波の変位は

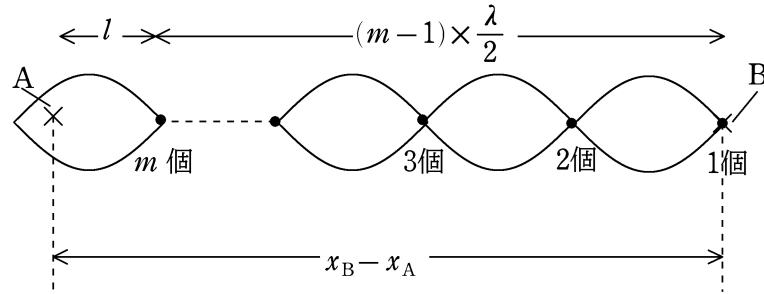
$$\begin{aligned} y &= y_1 + y_2 \\ &= a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{2x_B - x_A - x}{\lambda} \right) \right\} + a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{x_A - x}{\lambda} \right) \right\} \\ &= 2a \sin \left\{ 2\pi \times \frac{\frac{2x_B - x_A - x}{\lambda} + \frac{x_A - x}{\lambda}}{2} \right\} \cos \left\{ 2\pi \times \frac{\frac{2x_B - x_A - x}{\lambda} - \frac{x_A - x}{\lambda}}{2} \right\} \\ &= 2a \sin \left\{ 2\pi \left(\frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}}{\lambda} \right) \right\} \cos \left\{ 2\pi \left(\frac{\mathbf{x}_B - \mathbf{x}_A}{\lambda} \right) \right\} \end{aligned}$$

問3 Bは固定端反射をするので、定常波の節となる。Aに最も近く、AB間にある節とBとの距離は、 $(m-1) \times \frac{\lambda}{2}$ である。また、AB間の距離は $x_B - x_A$ であるから、Aに最も近く、AB間にある節とAとの距離 l は

$$l = (x_B - x_A) - (m-1) \times \frac{\lambda}{2}$$

求める座標は $x_A + l$ なので

$$x_A + l = x_B - \frac{(m-1)\lambda}{2} \quad \dots(2^*)$$



問4 Aが腹の場合、 $l = \frac{\lambda}{4}$ である。(2*)より

$$x_A + \frac{\lambda}{4} = x_B - \frac{(m-1)\lambda}{2}$$

$$\therefore \lambda = \frac{4(x_B - x_A)}{2m-1}$$

問5 正弦波の振動数を f_0 とし、Bが受け取る振動数を f_1 とする。正弦波の速さを v とすると、固定端Bの速さは $\frac{1}{3}v$ である。ドップラー効果の式より

$$f_1 = \frac{v + \frac{1}{3}v}{v} f_0 = \frac{4}{3} f_0$$

また、静止している観測者が反射波を受け取る振動数を f_2 とする。ドップラー効果の式より

$$f_2 = \frac{v}{v - \frac{1}{3}v} f_1 = 2f_0$$

$$\therefore \frac{f_2}{f_0} = 2$$

2019 年

1

問1 力学的エネルギー保存則より

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = mgH \quad \therefore v_0 = \sqrt{2gH}$$

問2 CD間における垂直抗力の大きさは mg なので、動摩擦力の大きさは μmg である。仕事の大きさ W は

$$W = \mu mgL$$

問3 問1より、 $v_0 = \sqrt{2gH}$ を考慮して、力学的エネルギー変化と非保存力がした仕事の関係より

$$\frac{1}{2}mv_1^2 - \frac{1}{2}m \times (\sqrt{2gH})^2 = -\mu mgL \quad \therefore v_1 = \sqrt{2g(H - \mu L)}$$

問4 運動量保存則と反発係数の式より

$$\begin{cases} mv_1 = mv_2 + MV_1 \\ 1 = -\frac{v_2 - V_1}{v_1 - 0} \end{cases}$$

これを解いて、 $v_2 = -\frac{M-m}{M+m}v_1$ (左向き)、 $V_1 = \frac{2m}{M+m}v_1$ (右向き)

問5 ばねが最も縮んだ時の物体の速度は0である。物体とばねの力学的エネルギー保存則より

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}MV_1^2 &= \frac{1}{2}kd^2 \\ \therefore d &= V_1 \sqrt{\frac{M}{k}} = \frac{2mv_1}{M+m} \sqrt{\frac{M}{k}} \end{aligned}$$

問6 運動量保存則より

$$mv_1 = (M+m)V_2 \quad \therefore V_2 = \frac{m}{M+m}v_1$$

問7 物体がはじめ静止していた位置を原点とし、ばねが縮む方向に x 軸をとる。小物体と物体の位置が x のときの加速度を x 軸の向きに a として、運動方程式を立てると

$$(M+m)a = -kx$$

したがって、小物体と物体は角振動数 $\omega = \sqrt{\frac{k}{M+m}}$ 、周期 $T = \frac{2\pi}{\omega} = 2\pi \sqrt{\frac{M+m}{k}}$ の単振動をする。また、振動の中心は原点で、このとき、 $V_2 = S\omega$ の関係より

$$\frac{m}{M+m}v_1 = S \sqrt{\frac{k}{M+m}} \quad \therefore S = \frac{mv_1}{\sqrt{k(M+m)}}$$

2

問1 $V^2 = V_R^2 + V_T^2$ より、 $|V_R| = \sqrt{V^2 - V_T^2}$

問2 人口衛星 S の力学的エネルギーは, $\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R}$

問3 人工衛星 S の面積速度は $\frac{1}{2}RV_T$

問4 面積速度一定則より,

$$\frac{1}{2}RV_T = \frac{1}{2}rv_T \quad \therefore v_T = \frac{R}{r}V_T$$

問5 力学的エネルギーは

$$\frac{1}{2}m(v_r^2 + v_T^2) - \frac{GMm}{r}$$

問6 楕円上において, 速度の中心方向成分が 0 になるのは, **2 箇所**

問7 無限遠方に飛び去るのは, 無限遠方 (万有引力による位置エネルギーは基準点で 0 の場所) で運動エネルギーが 0 以上であればよい. つまり, 無限遠方に飛び去る条件は力学的エネルギーを E として, $E \geq 0$ である. 逆に無限遠に飛び去れないのは, $E < 0$ であるから

$$\frac{1}{2}mV^2 - \frac{GMm}{R} < 0 \quad \therefore V < \sqrt{\frac{2GM}{R}}$$

で, $V_0 = \sqrt{\frac{2GM}{R}}$

問8 $E < 0$ では, S は楕円または円運動をする. 楕円運動において, 地球から最も離れる場所と最も近づく場所では, どちらも $v_r = 0$ である. このときの地球と S との距離を x として, 面積速度一定則と力学的エネルギー保存則より

$$\begin{cases} \frac{1}{2}RV_T = \frac{1}{2}xv_T & \dots(*) \\ \frac{1}{2}m(V_R^2 + V_T^2) - \frac{GMm}{R} = \frac{1}{2}mv_T^2 - \frac{GMm}{x} & \dots(2*) \end{cases}$$

(*) より, $v_T = \frac{RV_T}{x}$. これを (2*) に代入すると ((2*) の両辺はあらかじめ m で割っておく)

$$\frac{1}{2}(V_R^2 + V_T^2) - \frac{GM}{R} = \frac{1}{2} \cdot \left(\frac{RV_T}{x}\right)^2 - \frac{GM}{x}$$

両辺 x^2 をかけた後, 式を整理して

$$\begin{aligned} \frac{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM}{2R}x^2 + GMx - \frac{R^2V_T^2}{2} &= 0 \\ \therefore \{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM\}x^2 + 2GMRx - R^3V_T^2 &= 0 \end{aligned}$$

解の公式より

$$x = \frac{-GMR \pm \sqrt{(GMR)^2 + R^3V_T^2\{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM\}}}{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM}$$

$\sqrt{\quad}$ 中の R は外に出しておく. また, $E < 0$ であるから, $\frac{1}{2}m(V_R^2 + V_T^2) - \frac{GMm}{R} < 0$. つまり, $R(V_R^2 + V_T^2) < 2GM$ なので

$$x = \frac{GMR \mp R\sqrt{(GM)^2 + RV_T^2\{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM\}}}{2GM - R(V_R^2 + V_T^2)}$$

より, E と S の距離の最小値は $\frac{GMR - R\sqrt{(GM)^2 + RV_T^2\{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM\}}}{2GM - R(V_R^2 + V_T^2)}$ であり, 距離の最大値は

$$\frac{GMR + R\sqrt{(GM)^2 + RV_T^2\{R(V_R^2 + V_T^2) - 2GM\}}}{2GM - R(V_R^2 + V_T^2)}$$

である.

問9 円運動するとき, $V_R = 0$ である. また, 向心方向の運動方程式より

$$\frac{mV_T^2}{R} = \frac{GMm}{R^2} \quad \therefore V_T = \sqrt{\frac{GM}{R}}$$

問10 最も近づくとき, S の中心方向の成分は 0. つまり, $|V_R| = 0$

3

問1 キルヒホッフの法則より, $E - RI_1 = 0$, つまり $I_1 = \frac{E}{R}$

問2 電磁力の大きさ F は, $F = I_1Bl = \frac{EBl}{R}$

問3 vBl

問4 e と f では f の方が高電位である. キルヒホッフの法則より

$$E - RI_1 - vBl = 0 \quad I_1 = \frac{E - vBl}{R}$$

問5 e を基準としたときの f の電位は vBl である. コンデンサーに蓄えられる電荷は問題の図の下側を Q として, コンデンサーの基本式より $Q = C vBl$

問6 $Q = C vBl$ の両辺を時間 Δt の変化分を考えて

$$\frac{\Delta Q}{\Delta t} = CBl \frac{\Delta v}{\Delta t}$$

$$I_2 = \frac{\Delta Q}{\Delta t}, \quad A = \frac{\Delta v}{\Delta t} \text{ より,}$$

$$I_2 = CBlA \quad \dots(*)$$

問7 導体棒に流れる電流は e から f の向きに $I_2 - I_1$ である. したがって, 導体棒の運動方程式は

$$mA = -(I_2 - I_1)Bl \quad \dots(2*)$$

問8 導体棒, 電池 E , 抵抗 R 側のキルヒホッフ則より

$$E - RI_1 - vBl = 0 \quad \therefore I_1 = \frac{E - vBl}{R} \quad \dots(3*)$$

(*), (3*) を (2*) に代入して

$$\begin{aligned} mA &= -\left(CBlA - \frac{E - vBl}{R}\right)Bl \\ \therefore (m + CB^2l^2)A &= \frac{EBl - B^2l^2v}{R} \\ \therefore A &= \frac{EBl - B^2l^2v}{(m + CB^2l^2)R} \quad \dots(4*) \end{aligned}$$

問9 速度が一定なので, $A = 0$ を (4*) に代入して, v について解くと

$$EBl - B^2l^2v = 0 \quad \therefore v = \frac{E}{Bl}$$

4

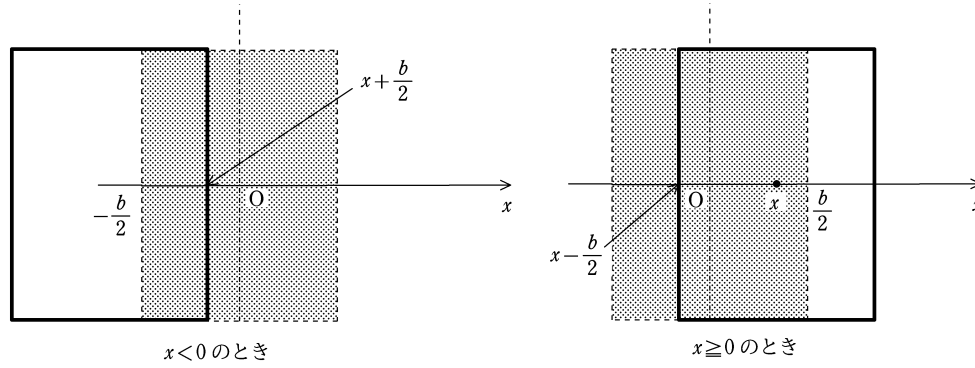
問1 $x < 0$ と $x \geq 0$ での図は下の通り.

$x < 0$ での磁束がコイルを貫いている面積は $a\left\{x + \frac{b}{2} - \left(-\frac{b}{2}\right)\right\} = a(x + b)$ であり, 磁束は $\Phi = Ba(x + b)$ である. コイルの磁束はだんだんと紙面奥方向に増えているので, コイルには反時計回りに起電力が生じる. すると, 端子2を基準とした端子1の電位は正となる. 起電力の大きさは

$$|V| = \left|\frac{\Delta\Phi}{\Delta t}\right| = Ba\left|\frac{\Delta x}{\Delta t}\right| = Bav$$

したがって, $V = +Bav$.

$x \geq 0$ での磁束がコイルを貫いている面積は $a\left\{\frac{b}{2} - \left(x - \frac{b}{2}\right)\right\} = a(b - x)$ であり, 磁束は $\Phi = Ba(x + b)$ であ

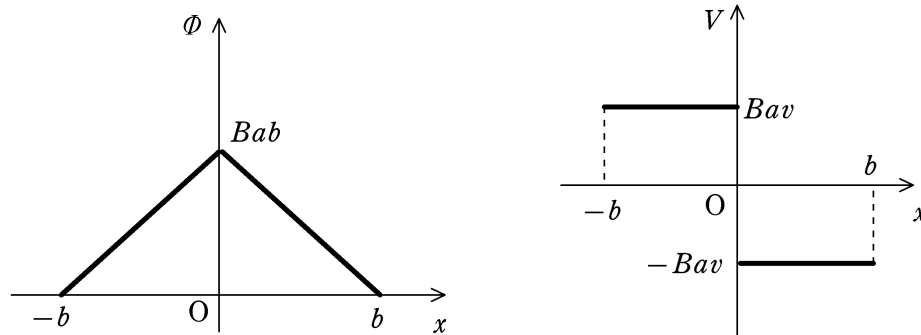


る。コイルの磁束はだんだんと紙面奥方向に減っているので、コイルには時計回りに起電力が生じる。すると、端子2を基準とした端子1の電位は負となる。起電力の大きさは

$$|V| = \left| \frac{\Delta\Phi}{\Delta t} \right| = Ba \left| \frac{\Delta(-x)}{\Delta t} \right| = Bav$$

したがって、 $V = -Bav$ 。

以上から、 $\Phi - x$ と $V - x$ のグラフは次図のようになる。



問2 $-b < x < 0$ にあるとき、 $x + \frac{b}{2}$ の場所にある部分に下から上方向に電流 $I = \frac{V}{r} = \frac{Bav}{r}$ が流れる。フレミング左手の法則^{*37}より電磁力は x 軸の負の方向にはたらき、その大きさは $IBa = \frac{B^2a^2v}{r}$ であるから、力を F として、 $F = -\frac{B^2a^2v}{r}$ 。

$0 < x < b$ のときは、 $x - \frac{b}{2}$ の場所にある部分に下から上向きに電流 $I = \frac{V}{r} = \frac{Bav}{r}$ が流れる。フレミング左手の法則より電磁力は x 軸の負の方向にはたらき、その大きさは $IBa = \frac{B^2a^2v}{r}$ であるから、 $F = -\frac{B^2a^2v}{r}$ 。

以上から、 $-b < x < 0$ 、 $0 < x < b$ とともに、 $F = -\frac{B^2a^2v}{r}$

問3 コイルは一定の速さ v で動いているので、コイルの力の和は0である。つまり、電磁力に逆らって、一定の力 $\frac{B^2a^2v}{r}$ を加えている。 $x = -b$ から $x = b$ までの移動距離は $2b$ だから、外力がする仕事 W は、

$$W = \frac{B^2a^2v}{r} \times 2b = \frac{2B^2a^2bv}{r}$$

問4 回路に流れる電流を I' とすると、 $I' = \frac{V}{R+r} = \frac{Bav}{R+r}$ である。また、 $x = -b$ から $x = b$ に移動するまでの時間は $\Delta t = \frac{2b}{v}$ であるから、求めるジュール熱 Q は

$$Q = I'^2 R \Delta t = \frac{B^2a^2v^2}{(R+r)^2} \times R \times \frac{2b}{v} = \frac{2B^2a^2bRv}{(R+r)^2}$$

問5 端子1と端子2の電圧は抵抗 R の両端の電圧と等しい。このことを用いて計算をする。^{*38}問4における端子1、2間の電圧は $V_{12} = I'R = \frac{BaRv}{R+r}$ であった。

^{*37} 左手の親指から力の向き、人差し指が磁場の向き、中指が磁場の向き

^{*38} もしくは、誘導起電力 + 内部抵抗 r の電圧降下を考えてもよいが、こちらは少し計算が面倒。

(ア) コイルの巻き数を n 倍にすると、誘導起電力の大きさも n 倍となる。コイルが n 巻きになったことから内部抵抗が nr であることに注意して、流れる電流 I_A は

$$I_A = \frac{nBav}{R + nr}$$

であるから、端子 1, 2 間の電圧は $V_A = I_A R = \frac{nBaRv}{R + nr}$ より

$$\frac{V_A}{V_{12}} = \frac{\frac{nBaRv}{R + nr}}{\frac{BaRv}{R + r}} = \frac{n(R + r)}{R + nr} \text{ 倍}$$

(イ) コイルの速度を n 倍にすると、誘導起電力の大きさも n 倍となり、電流も n 倍になる。したがって、端子 1, 2 間の電圧も n 倍となる。

(ウ) 外部抵抗の抵抗値を nR にしたとき、回路に流れる電流 I_U は

$$I_U = \frac{Bav}{nR + r}$$

であり、端子 1, 2 間の電圧は $V_U = I_U \times nR = \frac{nBaRv}{nR + r}$ より

$$\frac{V_U}{V_{12}} = \frac{\frac{nBaRv}{nR + r}}{\frac{BaRv}{R + r}} = \frac{n(R + r)}{nR + r} \text{ 倍}$$

$V_A = \frac{nBaRv}{R + nr}$, $V_I = \frac{nBaRv}{R + r}$, $V_U = \frac{nBaRv}{nR + r}$ であり、分子がすべて同じであるから、分母を比較する。 $nR + r - (R + nr) = (n - 1)(R - r) > 0$ ($\because n > 1, R > r$) より、 $V_A > V_U$ 。また、明らかに $R + r$ が一番小さく、 V_I が一番大きくなるので、 $V_U < V_A < V_I$ 。したがって、(イ), (ア), (ウ)

問 6 効率を e とする。外力がした仕事は抵抗 r と抵抗 R で消費したジュール熱の和に等しく、電流を I 、電流が流れた時間を Δt とすると、

$$e = \frac{Q}{W} = \frac{I^2 R \Delta t}{I^2 R \Delta t + I^2 r \Delta t} = \frac{R}{R + r}$$

となり、効率 e は $\frac{\text{外部の抵抗}}{\text{全体の抵抗}}$ である。

(ア) コイルの巻き数を n 倍にすると、内部抵抗が nr になるので、 $e_A = \frac{R}{R + nr}$ であり、

$$\frac{e_A}{e} = \frac{\frac{R}{R + nr}}{\frac{R}{R + r}} = \frac{R + r}{R + nr} \text{ 倍}$$

(イ) コイルの速度を n 倍しても e は変化しないので、 $e_I = \frac{R}{R + r}$ より、1 倍

(ウ) 外部抵抗を n 倍にするので、 $e_U = \frac{nR}{nR + r}$ であり

$$\frac{e_U}{e} = \frac{\frac{nR}{nR + r}}{\frac{R}{R + r}} = \frac{n(R + r)}{nR + r} \text{ 倍}$$

$\frac{e_A}{e} (= \frac{R + r}{R + nr})$, $\frac{e_I}{e} (= 1 = \frac{R + r}{R + r})$, $\frac{e_U}{e} (= \frac{n(R + r)}{nR + r} = \frac{R + r}{R + \frac{r}{n}})$ を比較する。分子をすべて $R + r$ にしたとき、分母が一番大きいのは $\frac{e_A}{e}$ で、次が $\frac{e_I}{e}$ で分母が一番小さいのが $\frac{e_U}{e}$ なので、(ウ), (イ), (ア)

5

問 1 S_1, S_2 を通った波の位相差が 0 だから。(18 文字)

問2 $P(L, y)$ とする. $S_1P - S_2P$ を計算^{*39}すると

$$\begin{aligned} S_1P - S_2P &= \sqrt{L^2 + \left(y + \frac{d}{2}\right)^2} - \sqrt{L^2 + \left(y - \frac{d}{2}\right)^2} \\ &= L \left\{ 1 + \frac{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2}{L^2} \right\}^{\frac{1}{2}} - L \left\{ 1 + \frac{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2}{L^2} \right\}^{\frac{1}{2}} \\ &\doteq L \left\{ 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\left(y + \frac{d}{2}\right)^2}{L^2} \right\} - L \left\{ 1 + \frac{1}{2} \times \frac{\left(y - \frac{d}{2}\right)^2}{L^2} \right\} \\ &= \frac{1}{2L} \left\{ \left(y + \frac{d}{2}\right)^2 - \left(y - \frac{d}{2}\right)^2 \right\} \\ &= \frac{dy}{L} \end{aligned}$$

したがって, m を整数として, 強め合いの条件は

$$\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{dy}{L} = 2\pi \times m \quad \therefore y = \frac{L\lambda}{d} m$$

$y = \frac{L\lambda}{d} m$ は公差が $\frac{L\lambda}{d}$ の等差数列であるから, 明線間隔は $\Delta y = \frac{L\lambda}{d}$

問3 問2 で得た, $\Delta y = \frac{L\lambda}{d}$ に値を代入して

$$\Delta y = \frac{10.0 \times 4.0 \times 10^{-7}}{1.0 \times 10^{-3}} = 4.0 \times 10^{-3} \text{ m}$$

問4 $Q\left(-l, \frac{1}{2}d\right)$ とすると, $QS_1 - QS_2$ は

$$\begin{aligned} QS_1 - QS_2 &= \sqrt{l^2 + d^2} - l = l \left(1 + \frac{d^2}{l^2} \right)^{\frac{1}{2}} - l \\ &\doteq l \left(1 + \frac{1}{2} \times \frac{d^2}{l^2} \right) - l = \frac{d^2}{2l} \end{aligned}$$

であり, $P(L, y_1)$ として, 問2 と同様の計算をして, $S_1P - S_2P = \frac{dy_1}{L}$ である. 点 $(L, 0)$ の明線は位相差が0であったことから位相差が0の強め合いの条件より

$$\begin{aligned} \frac{2\pi}{\lambda} \times \left(\frac{d^2}{2l} + \frac{dy_1}{L} \right) &= 0 \\ \therefore y_1 &= -\frac{Ld}{2l} \end{aligned}$$

問5 薄膜の厚さは $10^{-7} \sim 10^{-5} \text{ m}$ とかなり薄く, 光が通る経路の長さや薄膜の厚みはイコールと考えてよい. また, 薄膜の厚み $\ll l, L$ なので^{*40}, 薄膜を S_1 に装着する際, 計算上 S_1 より左側に薄膜を装着しても右側に装着してもほとんど変わらない. ここでは, 左側に装着したときを考える. $S_1P - S_2P \doteq \frac{d \cdot (-y_2)}{L}$ であることから, 整数を m として, 強め合いの条件は

$$\underbrace{\frac{2\pi}{\lambda} \times \delta - \frac{2\pi}{\lambda} \times \delta + \frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{d \cdot (-y_2)}{L}}_{\text{薄膜挿入による位相差}} = 2\pi m$$

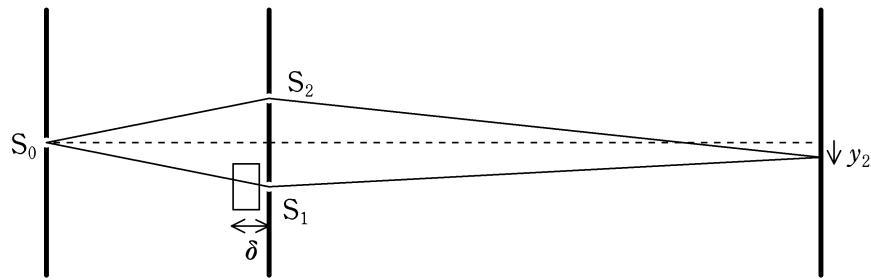
$$\therefore (n-1)\delta = m\lambda + \frac{dy_2}{L} \quad \dots(*)$$

ここで, $y_2 < \Delta y = \frac{L\lambda}{d}$ という条件から, $\frac{dy_2}{L} < \lambda$ なので, (*)において, δ が最小となるのは, $m = 0$ のときである.^{*41} このとき, $\delta = \frac{dy_2}{L(n-1)}$

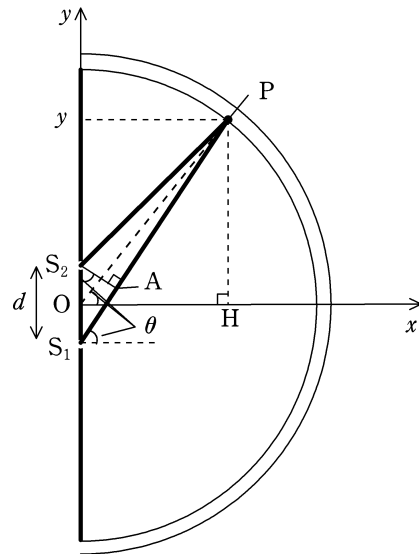
^{*39} S_1P, S_2P を平行とみなして, 経路差を求めてもよい.

^{*40} 薄膜の厚みが 10^{-6} m として, 問3によれば, $l = 5.0 \text{ cm}, L = 10.0 \text{ m}$

^{*41} $m = -1, -2, \dots$ では, δ は負になる.



問6 R は d に比べて十分大きいので、 $S_1P \parallel S_2P$ とみなす。^{*42}図は P の y 座標が正のときであり、点 S_2 から線分 S_1P に下した垂線の交点を A として、 $S_1P - S_2P \approx S_1A$ と近似する。 $\angle S_1S_2A = \theta$ とすると、 S_1P の x 軸正方向からのなす角は θ で、 $S_1P \parallel S_2P$ から、 OP の x 軸正方向からのなす角も θ と近似できる。 P から x 軸へ下した垂線の交点を H とすれば、 $\triangle OPH$ をみて、 $\sin \theta = \frac{y}{R}$ となる。したがって



$$S_1A = d \sin \theta \approx d \times \frac{y}{R}$$

であり、 $y < 0$ のときも考慮すると、経路差は $\frac{d|y|}{R}$

問7 問6の結果を用いて、 m を整数とすると、強め合いの条件は

$$\frac{2\pi}{\lambda} \times \frac{dy}{R} = 2\pi m \quad \therefore y = \frac{R\lambda}{d} m$$

値を代入して

$$y = \frac{10.0 \times 4.0 \times 10^{-7}}{1.0 \times 10^{-3}} m$$

$$-\frac{1}{200} \times 10.0 \leq y \leq \frac{1}{200} \times 10.0 \text{ より}$$

$$-\frac{1}{200} \times 10.0 \leq \frac{10.0 \times 4.0 \times 10^{-7}}{1.0 \times 10^{-3}} m \leq \frac{1}{200} \times 10.0$$

$$\therefore -12.5 \leq m \leq 12.5$$

したがって、この範囲に $m = -12, -11, \dots, 11, 12$ の **25本** の明線がある。

問8 問6より、 $S_1A = d \sin \theta$ であり、明線の条件は

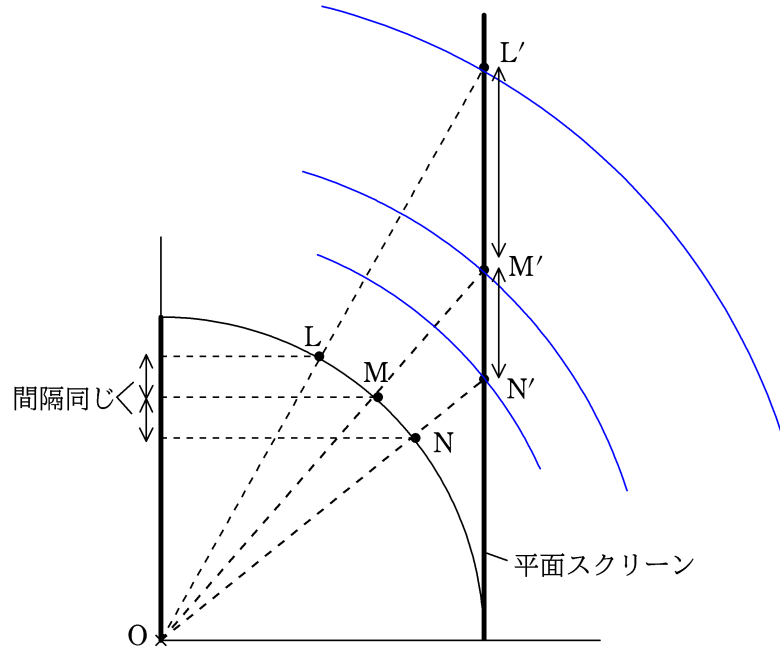
$$\frac{2\pi}{\lambda} \times d \sin \theta = 2\pi m \quad \therefore \sin \theta = \frac{\lambda}{d} m$$

とも表すことができ、明線ができる方向は (R が d より十分大きいなら) R によらない。

そこで、上図のように半円筒スクリーンにできる隣り合う明線 L, M, N について考える。問7で立てた式 $y = \frac{R\lambda}{d} m$ より、 y 方向の明線間隔は $\Delta y = \frac{R\lambda}{d}$ で一定である。 L の明線に対応する平面スクリーンの明線 L' は直線 OL と平面スクリーンの交点にあり、 M, N についても同じように考えることができる。すると、 y が大きくなるほど、明線の間隔が大きくなるのがわかる。したがって、**(ア)**。^{*43}

^{*42} 問2のような経路差の計算をしたらかなりややこしくなるので、ここでは別な解法で経路差を計算する。

^{*43} これは問6の半円筒スクリーンを利用した意図にのって考えたのであるが、そもそも、2定点からの距離の差が一定である点の軌跡が双曲線であることを知っているのだから、双曲線のグラフをイメージすれば、(ア)であることは理解できる。



6

問1 風船内の空気の物質量を n_0 とすると、状態方程式より、 $P_0V = n_0RT_0$ であるから、 $n_0 = \frac{P_0V}{RT_0}$. したがって、風船

内の空気の質量は、 $w = mn_0 = \frac{mP_0V}{RT_0}$

問2 風船内の空気と地表付近の大気の圧力と温度が同じなので、密度も同じである.*44 したがって、問1を利用して、風船

内の空気の密度を計算すればよい。 $\rho_0 = \frac{w}{V} = \frac{mP_0}{RT_0}$

問3 気球のつり合いの式を立てる。気球自体の重さが Mg 、風船内の空気の重さが ρ_1Vg 、浮力は ρ_0Vg であるから

$$Mg + \rho_1Vg = \rho_0Vg \quad \therefore \rho_1 = \rho_0 - \frac{M}{V} \quad \dots(*)$$

また、風船内の空気と地表の空気の間について $\frac{P}{\rho T} = \text{一定}$ の式を立てると

$$\frac{P_0}{\rho_1 T_1} = \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \quad \therefore T_1 = \frac{\rho_0}{\rho_1} T_0 \quad \dots(2*)$$

問4 地表付近では、風船内の空気と地表の空気の圧力は等しいので、風船内の密度と温度を ρ, T として

$$\rho T = \rho_0 T_0 = \text{一定}$$

が成り立つ。 T を大きくすると、 ρ は小さくなり、風船内の空気が追い出されて軽くなる。 ρ が非常に小さくなり、風船内の空気が無視できるときに気球にはたらく力は気球自体の重さ Mg と、浮力 ρ_0Vg で、 $\rho_0Vg \geq Mg$ でないと気球は浮上しない。したがって、 $M \leq \rho_0V$ より、 $M_0 = \rho_0V$

問5 問4と問2の結果より

$$\begin{aligned} M_0 &= \rho_0V = \frac{mP_0}{RT_0} \times V \\ &= \frac{(29 \times 10^{-3}) \times (1000 \times 10^2) \times 2000}{8.3 \times 300} \\ &\approx 2 \times 10^3 \text{ kg} \end{aligned}$$

問6 (2*) に $T_1 = \frac{6}{5}T_0$ を代入して

$$\frac{6}{5}T_0 = \frac{\rho_0}{\rho_1}T_0 \quad \therefore \rho_1 = \frac{5}{6}\rho_0$$

*44 分子量が一定であれば、圧力、温度、密度の間に、 $\frac{P}{\rho T} = \text{一定}$ の関係が成り立つ。

これを(*)に代入して

$$\frac{5}{6}\rho_0 = \rho_0 - \frac{M}{V} \quad \therefore \rho_0 = \frac{6M}{V}$$

さらに, これを問2の結果である $\rho_0 = \frac{mP_0}{RT_0}$ に代入して

$$\frac{6M}{V} = \frac{mP_0}{RT_0} \quad \therefore M = \frac{mP_0V}{6RT_0}$$

問7 高さ x における大気密度を ρ_x とおく. 地表での大気と高さ x での大気において $\frac{P}{\rho T} = \text{一定}$ の式を立てて,

$$P(x) = P_0 \left(1 - \frac{\alpha x}{T_0}\right), \quad T(x) = T_0 - \beta x \text{ を代入すると}$$

$$\begin{aligned} \frac{P(x)}{\rho_x T(x)} &= \frac{P_0}{\rho_0 T_0} \\ \therefore \rho_x &= \frac{\rho_0 T_0 P(x)}{P_0 T(x)} \\ &= \frac{\rho_0 T_0 P_0 \left(1 - \frac{\alpha x}{T_0}\right)}{P_0 (T_0 - \beta x)} = \frac{T_0 - \alpha x}{T_0 - \beta x} \rho_0 \end{aligned}$$

$$\rho_0 = \frac{mP_0}{RT_0} \text{ より}$$

$$= \frac{T_0 - \alpha x}{T_0 - \beta x} \times \frac{mP_0}{RT_0}$$

問8 問7より, $\rho_h = \frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \beta h} \rho_0$ である.

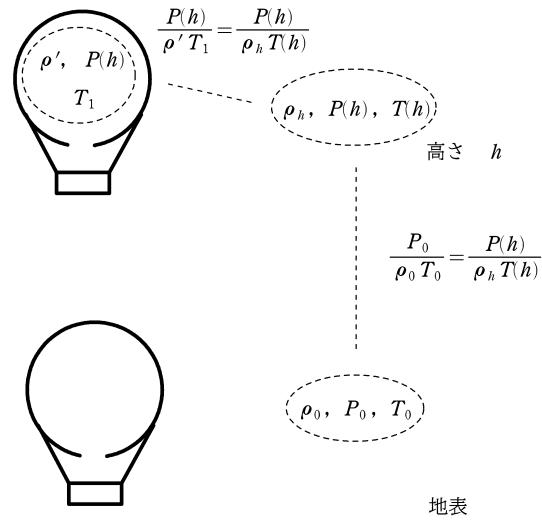
風船内の空気の密度を ρ' とし, 高さ h における風船

内と大気の $\frac{P}{\rho T} = \text{一定}$ の式より

$$\begin{aligned} \frac{P(h)}{\rho' T_1} &= \frac{P(h)}{\rho_h T(h)} \\ \therefore \rho' &= \frac{T(h)}{T_1} \rho_h \\ &= \frac{T_0 - \beta h}{T_1} \times \frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \beta h} \rho_0 \\ &= \frac{T_0 - \alpha h}{T_1} \rho_0 \end{aligned}$$

$$T_1 = \frac{6}{5} T_0 \text{ より,}$$

$$= \frac{5(T_0 - \alpha h)}{6T_0} \rho_0$$



また, 高さ h での気球のつり合いの式を立てる. 気球自体の重さが $Mg = \frac{1}{6} \rho_0 V g$ (問6より), 空気の重さが $\rho' V g$, 浮力の大きさが $\rho_h V g$ であるから

$$\frac{1}{6} \rho_0 V g + \rho' V g = \rho_h V g$$

$$\rho' = \frac{5(T_0 - \alpha h)}{6T_0} \rho_0, \quad \rho_h = \frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \beta h} \rho_0 \text{ を代入して}$$

$$\frac{1}{6} \rho_0 + \frac{5(T_0 - \alpha h)}{6T_0} \rho_0 = \frac{T_0 - \alpha h}{T_0 - \beta h} \rho_0$$

$$\therefore h = \frac{6\beta - \alpha}{5\alpha\beta} T_0$$

問9 問8の結果に代入して

$$h = \frac{6 \times 0.00649 - 0.0341}{5 \times 0.0341 \times 0.00649} \times 300 = 1.3 \times 10^3 \text{ m}$$