[I]

P の速さを v_P とする．向心方向の運動方程式より

$$m\frac{v_\mathrm{P}^2}{a} = G\frac{M_\mathrm{A}m}{a^2}$$
$$\therefore v_\mathrm{P} = \underbrace{\sqrt{\frac{GM_\mathrm{A}}{a}}}_{(ア)}$$

分裂後，P_1 の接線方向の速度は $v_\mathrm{P} = \sqrt{\dfrac{GM_\mathrm{A}}{a}}$ のままで，向心方向の速度成分が v_1 であるから，P_1 の力学的エネルギー E は

$$\begin{aligned}
E &= \frac{1}{2}m_1(v_\mathrm{P}^2 + v_1^2) + \left(-G\frac{M_\mathrm{A}m_1}{a}\right)\\
&= \frac{1}{2}m_1v_\mathrm{P}^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_\mathrm{A}m_1}{a}\\
&= \frac{1}{2}m_1\left(\sqrt{\frac{GM_\mathrm{A}}{a}}\right)^2 + \frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_\mathrm{A}m_1}{a}\\
&= \underbrace{\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_\mathrm{A}m_1}{2a}}_{(イ)}
\end{aligned}$$

無限遠まで飛び去る条件は $E > 0$ である．(イ) を用いて

$$\frac{1}{2}m_1v_1^2 - \frac{GM_\mathrm{A}m_1}{2a} > 0$$
$$\therefore v_1 > \underbrace{\sqrt{\frac{GM_\mathrm{A}}{a}}}_{(ウ)}$$

AC の距離を x とし，A と B の角速度を ω とする．A と B は万有引力によって C を中心に等速円運動しているので，向心方向の運動方程式より

$$\begin{cases}
M_\mathrm{A}x\omega^2 = \dfrac{GM_\mathrm{A}M_\mathrm{B}}{R^2} & \cdots(*)\\
M_\mathrm{B}(R-x)\omega^2 = \dfrac{GM_\mathrm{A}M_\mathrm{B}}{R^2} & \cdots(2*)
\end{cases}$$

$(*)$，$(2*)$ より

$$M_\mathrm{A}x\cancel{\omega^2} = M_\mathrm{B}(R-x)\cancel{\omega^2}$$
$$\therefore x = \underbrace{\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R}_{(エ)}$$

また，(エ) を $(*)$ に代入して ω を求めると

$$\cancel{M_\mathrm{A}} \times \frac{\cancel{M_\mathrm{B}}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R \times \omega^2 = \frac{G\cancel{M_\mathrm{A}}\cancel{M_\mathrm{B}}}{R^2}$$
$$\therefore \omega = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{G(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}{R}} \quad \cdots(3*)$$

また，(エ) より

$$R-x=R-\frac{M_{\mathrm{B}}}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}R$$
$$=\frac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}R$$

であるから，B の速さ v_{B} は

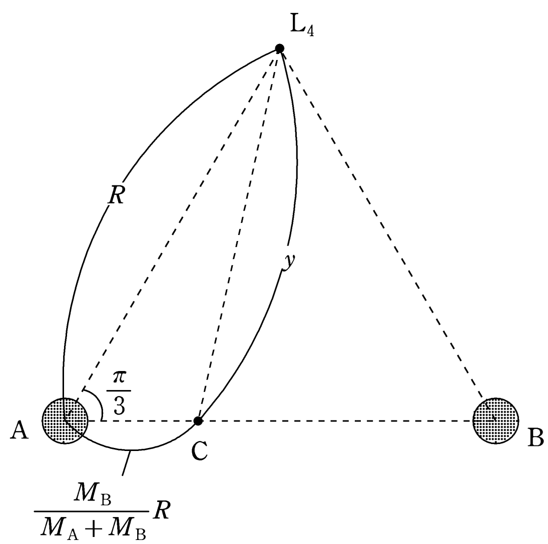
$$v_{\mathrm{B}}=(R-x)\omega$$
$$=\frac{M_{\mathrm{A}}}{M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}}}\cancel{R}\times\frac{1}{\cancel{R}}\sqrt{\frac{G(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})}{R}}$$
$$=\underbrace{M_{\mathrm{A}}\sqrt{\frac{G}{R(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})}}}_{(オ)}$$

Q は A，B に対して相対位置を変えないということから，A，B と同じく角速度 ω で円運動している．したがって，その周期 T は

$$T=\frac{2\pi}{\omega}$$
$$=\underbrace{2\pi R\sqrt{\frac{R}{G(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})}}}_{(カ)}$$

Q にはたらく合力を F とする．Q は C を中心に半径 r で角速度 ω の等速円運動をしている．向心方向の運動方程式より

$$m'r\omega^2=F$$
$$\therefore F=Gm'(M_{\mathrm{A}}+M_{\mathrm{B}})\times\frac{r}{\underbrace{R^3}_{(キ)}}$$



三角形 $\mathrm{ACL_4}$ について余弦定理の式を立てて，$\mathrm{L_4C}$ の距離 y を求める．

$$\begin{aligned} y^2 &= R^2 + \left(\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R\right)^2 - 2R\left(\frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R\right)\cos\frac{\pi}{3} \\ &= \frac{M_\mathrm{A}^2 + M_\mathrm{A}M_\mathrm{B} + M_\mathrm{B}^2}{(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})^2}R^2 \\ \therefore y &= \frac{R\sqrt{M_\mathrm{A}^2 + M_\mathrm{A}M_\mathrm{B} + M_\mathrm{B}^2}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}} \end{aligned}$$

Q にはたらく万有引力の合力の大きさを F' とする．Q は半径 y，角速度 ω の等速円運動を行っているから向心方向の運動方程式より

$$\begin{aligned} m'y\omega^2 &= F' \\ \therefore F' &= m' \times \frac{R\sqrt{M_\mathrm{A}^2 + M_\mathrm{A}M_\mathrm{B} + M_\mathrm{B}^2}}{\cancel{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}} \times \frac{G\cancel{(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}}{R^3} \\ &= \underbrace{\frac{Gm'\sqrt{M_\mathrm{A}^2 + M_\mathrm{A}M_\mathrm{B} + M_\mathrm{B}^2}}{R^2}}_{(ク)} \end{aligned}$$

また，$\mathrm{L_4}$ から線分 AB に下した垂線の交点を H とすると

$$\begin{aligned} \mathrm{CH} &= \frac{R}{2} - x \\ &= \frac{R}{2} - \frac{M_\mathrm{B}}{M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B}}R \\ &= \frac{M_\mathrm{A}-M_\mathrm{B}}{2(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}R \end{aligned}$$

また，

$$\mathrm{L_4H} = R\sin\frac{\pi}{3} = \frac{\sqrt{3}}{2}R$$

であるから，

$$\begin{aligned} \tan\phi &= \frac{\mathrm{L_4H}}{\mathrm{CH}} \\ &= \frac{\frac{\sqrt{3}}{2}R}{\frac{M_\mathrm{A}-M_\mathrm{B}}{2(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}R} \\ &= \underbrace{\frac{\sqrt{3}(M_\mathrm{A}+M_\mathrm{B})}{M_\mathrm{A}-M_\mathrm{B}}}_{(ケ)} \end{aligned}$$