[I]

問 1 棒の左端まわりの力のモーメントのつり合いの式より

$$L \times F - \frac{L}{2}\cos\theta \times Mg = 0 \qquad \therefore \quad F = \boldsymbol{\frac{1}{2}Mg\cos\theta}$$

問 2 角度 $\Delta\theta$ 動かしたときの力 F の方向への変位は $L\Delta\theta$ と近似できるので

$$\Delta W = F \times L\Delta\theta = \boldsymbol{\frac{1}{2}MgL\Delta\theta} \times \cos\theta$$

問 3 棒の重心が鉛直方向に $\frac{L}{2}$ 変位しているので，重力による位置エネルギーが $Mg \times \frac{L}{2}$ 上昇していることがわかる．力学的エネルギー変化と非保存力のした仕事の関係から，人がした仕事 W は位置エネルギーの増加に等しいので，

$$W = \boldsymbol{\frac{1}{2}MgL}$$

[*1]

問 4 棒と床とのなす角を α とすると，$\sin\alpha = \frac{H}{2L}$ から，$\cos\alpha = \frac{\sqrt{4L^2 - H^2}}{2L}$．棒の左端まわりの力のモーメントのつり合いの式より

$$2L \times F' - L\cos\alpha \times 2Mg = 0 \qquad \therefore \quad F' = Mg\cos\alpha = \boldsymbol{\frac{\sqrt{4L^2 - H^2}}{2L}Mg}$$

棒の水平方向のつり合いの式を立てると

$$F'\sin\alpha = F_{\mathrm{W}}$$

$$\therefore \quad F_{\mathrm{w}} = F'\sin\alpha = \frac{\sqrt{4L^2 - H^2}}{2L}Mg \times \frac{H}{2L} = \boldsymbol{\frac{H\sqrt{4L^2 - H^2}}{4L^2}Mg}$$

問 5 人が棒を押すと壁の距離が x のとき，$\tan\alpha = \frac{H}{x}$ より，$\cos\alpha = \frac{x}{\sqrt{x^2 + H^2}}$ だから，棒の左端まわりの力のモーメントのつり合いの式を立てて F' を求めると

$$\sqrt{x^2 + H^2} \times F' - L\cos\alpha \times 2Mg = 0 \qquad \therefore \quad F' = \frac{L}{\sqrt{x^2 + H^2}}Mg\cos\alpha = \boldsymbol{\frac{x}{x^2 + H^2} \cdot 2MgL}$$

問 6 $f(x) = \frac{x}{x^2 + H^2}\,(x > 0)$ とおくと，$F' = 2MgLf(x)$ となる．相加相乗平均の不等式を用いて

$$f(x) = \frac{1}{x + \frac{H^2}{x}} \leqq \frac{1}{2\sqrt{x \cdot \frac{H^2}{x}}} = \frac{1}{2H}$$

等号が成り立つのは $x = \frac{H^2}{x}$ のときで，$x > 0$ より $x = H$ のとき．よって，$f(x)$ は $x = H$ のとき最小値 $\frac{1}{2H}$ となり，F' は $x = \boldsymbol{H}$ で最小値 $\boldsymbol{\frac{L}{H} \cdot Mg}$ をとる．

[*1] 問 2 を用いて，次のように積分計算をしてもよい．

$$W = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{1}{2}MgL\cos\theta d\theta = \frac{1}{2}MgL\Big[\sin\theta\Big]_0^{\frac{\pi}{2}} = \boldsymbol{\frac{1}{2}MgL}$$

[II]

問 1 半径が $x\,(r < x < R)$ の球を閉曲面として選ぶと内部にある電荷は Q である．ガウスの法則より

$$E \times 4\pi x^2 = \frac{Q}{\varepsilon_0} \qquad \therefore \quad E = \boldsymbol{\frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{Q}{x^2}}$$

問 2 問題文にあるように，今回の電位の計算は金属球の中心に電荷が集中したときと等しいので，A の表面の電位は $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \dfrac{Q}{r}$，B の表面の電位は $\dfrac{1}{4\pi\varepsilon_Q} \cdot \dfrac{Q}{R}$ であるから，その電位差 V は

$$V = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right) = \frac{R-r}{4\pi\varepsilon_0 rR} \cdot Q$$

電気容量を C とすると，その定義より $C = \dfrac{Q}{V}$ であるから

$$\therefore \quad C = \frac{Q}{V} = \boldsymbol{4\pi\varepsilon_0 \cdot \frac{rR}{R-r}}$$

[*2]

問 3 導体内部の電場は 0 となるから ③, ⑥, ⑨ にしぼられる．外部電場によって静電誘導により金属の左側部分は負の電荷が，右側部分には正の電荷が分布する．負の電荷には電気力線が入り込み，正電荷は飛び出すことから ⑨ が最も適当な図である．

問 4 半径が a の金属球に電荷 q が帯電したとき，問 2 と同様に電位 V の計算を行うと

$$V = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \frac{q}{a}$$

であるから，この球の電気容量 C は

$$C' = \frac{q}{V} = 4\pi\varepsilon_0 a$$

となる．よって，C と D の電気容量 C_1, C_2 は

$$C_1 = 4\pi\varepsilon_0 r, \qquad C_2 = 4\pi\varepsilon_0 R$$

となる．C，D の表面の電位を V とすると，コンデンサーの式から

$$Q_1 = C_1 V = 4\pi\varepsilon_0 rV \quad \cdots①, \qquad Q_2 = C_2 V 4\pi\varepsilon_0 RV \quad \cdots②$$

また，

$$Q = Q_1 + Q_2 \quad \cdots③$$

①, ②, ③ より，

$$Q_1 = \frac{r}{R+r}Q, \qquad Q_2 = \frac{R}{R+r}Q$$

[*2] 単位電荷を電場に抗して A から B に移動させたときの外力がした仕事が電位差と等しいので，問 1 を用いて

$$V = -\int_r^R E dx = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\int_r^R \frac{1}{x^2}dx = -\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0}\left[-\frac{1}{x}\right]_r^R = \frac{Q}{4\pi\varepsilon_0} \cdot \left(\frac{1}{r} - \frac{1}{R}\right)$$

とも計算できる．

よって，それぞれの電荷密度は

$$\rho_1 = \frac{Q}{4\pi r^2} = \boldsymbol{\frac{Q}{4\pi r(R+r)}}, \qquad \rho_2 = \frac{Q}{4\pi R^2} = \boldsymbol{\frac{Q}{4\pi R(R+r)}}$$

問 5 ガウスの法則より

$$E_1 \times 4\pi r^2 = \frac{\frac{r}{R+r}Q}{\varepsilon_0}, \qquad E_2 \times 4\pi R^2 = \frac{\frac{R}{R+r}Q}{\varepsilon_0}$$

$$\therefore \quad E_1 = \boldsymbol{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 r(R+r)}}, \qquad E_2 = \boldsymbol{\frac{Q}{4\pi\varepsilon_0 R(R+r)}}$$

[III]

問 1 Nh の原子番号が 113 で中性子数が 165 なので質量数は $113+165=\mathbf{278}$．また，核反応の前後で質量数の和は保存するので，[イ] の質量数は

$$70+209-278=1$$

より，[イ] の質量数は **1**.
一方，Zn の原子番号は 30 で，Bi の原子番号は 83 である．核反応の前後で陽子の数の和は保存するので，[イ] の陽子の数は

$$30+83-113=0$$

陽子の数が 0 で質量数が 1 なので，[イ] の粒子名は **中性子**．個数は **1 個**.

問 2 亜鉛原子が電子を k 個失ったので電荷は $+ke$ である．衝突直前の運動エネルギーを K として，力学的エネルギー保存則より

$$K=\boldsymbol{keV}$$

また，このときの速さを v とすると

$$\frac{1}{2}Mv^2=keV \qquad \therefore \quad v=\sqrt{\frac{2keV}{M}}$$

よって，物質波の波長 λ は

$$\lambda=\frac{h}{Mv}=\boldsymbol{\frac{h}{\sqrt{2keMV}}}$$

問 3 亜鉛原子核は陽子 30 個，中性子 $70-30=40$ 個からなる．その質量の和は

$$30\times1.0073[\mathrm{u}]+40\times1.0087[\mathrm{u}]=70.567[\mathrm{u}]$$

よって，質量欠損 Δm は

$$\Delta m=70.567[\mathrm{u}]-69.909[\mathrm{u}]=0.658[\mathrm{u}]=0.658\times(1.66\times10^{-27})[\mathrm{kg}]$$

したがって，結合エネルギーは

$$\begin{aligned}0.658\times(1.66\times10^{-27})\times(3.00\times10^8)^2[\mathrm{J}]&=\frac{0.658\times(1.66\times10^{-27})\times(3.00\times10^8)^2}{1.60\times10^{-19}}[\mathrm{eV}]\\&=6.1\times10^8[\mathrm{eV}]=\mathbf{6.1\times10^2[MeV]}\end{aligned}$$

問 4 ${}^{213}_{83}\mathrm{Bi}$ が α 崩壊すると原子番号が -2，質量数が -4 となるから，A は ${}^{209}_{81}\mathrm{Tl}$ より，**^{209}Tl**．β 崩壊すると原子番号が $+1$，質量数は変わらないから B は ${}^{213}_{84}\mathrm{Po}$ より，**^{213}Po** となる．A から（ア）を経て C に，B から（イ）を経て C に変化するので，原子番号，質量数が同じになるための条件は（ア）は **β 崩壊**，（イ）は **α 崩壊** である．よって，C は ${}^{209}_{82}\mathrm{Pb}$ より，**^{209}Pb**．ここから（ウ）を経て ${}^{209}_{83}\mathrm{Bi}$ になり，質量数が変化せず，原子番号が $+1$ となっているので，（ウ）は **β 崩壊**.

問 5 ${}^{278}_{113}\mathrm{Nh}$ から ${}^{254}_{101}\mathrm{Md}$ になるまでに α 崩壊が x 回，β 崩壊が y 回行われるとすると，中性子数に関する式と，原子番号に関する式を立てて

$$\begin{cases}278-4x=254\\113-2x+y=101\end{cases} \qquad \therefore \quad x=6, \quad y=0$$

よって，α 崩壊は **6 回**，β 崩壊は **0 回**.

$^{254}_{101}$Md の 2 つ前に生成される原子核は，質量数が $4\times2=8$ 個，原子番号が $2\times2=4$ 個多い．$^{262}_{105}$Dd より，$\mathbf{^{262}Db}$

問 6（式 1）を時刻 $t+\Delta t$ について立てて

$$N+\Delta N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t+\Delta t}{T}}=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}\cdot\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}$$

$N=N_0\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{t}{T}}$ より

$$=N\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}$$

よって

$$\Delta N=N\left\{\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}-1\right\}$$

より，a：**1**，b：**2**，c：$\boldsymbol{\frac{\Delta t}{T}}$，d：**1**.

$\left(\frac{1}{2}\right)^{\frac{\Delta t}{T}}\fallingdotseq 1+\frac{\Delta t}{T}\log\frac{1}{2}=1-\frac{\Delta t}{T}\log 2$ の近似式より

$$\Delta N=N\left(1-\frac{\Delta t}{T}\log 2-1\right)=-\frac{\log 2}{T}\cdot N\Delta t$$

（式 2）と比較して $\lambda=\boldsymbol{\frac{\log 2}{T}}$

問 7 時刻 t における原子核 A_1，A_2 の数を $N_1(t)$，$N_2(t)$ とすると，時刻 $t+\Delta t$ においては，問 6 より

$$\begin{cases}N_1(t+\Delta t)=N_1(t)-\dfrac{\log 2}{T_1}\cdot N_1(t)\Delta t & \cdots(*)\\ N_2(t+\Delta t)=N_2(t)+\dfrac{\log 2}{T_1}\cdot N_1(t)\Delta t-\dfrac{\log 2}{T_2}\cdot N_2(t)\Delta t & \cdots(2*)\end{cases}$$

$(*)$ より

$$\frac{N_1(t+\Delta t)-N_1(t)}{\Delta t}=-\frac{\log 2}{T_1}N_1(t)$$

である．$N_1(0)=N_0$ より，$t=0$ における A_1 のグラフの傾きは負であり，$N_1(t)$ の減少とともにグラフの絶対値は小さくなりやがて 0 に近づく．また，半減期が T_1 なので，$N_1(T_1)=\frac{N_0}{2}$ となる．以上より，$\boxed{\text{あ}}$，$\boxed{\text{う}}$，$\boxed{\text{お}}$ のグラフは全て ⑧

また，$(2*)$ より

$$\frac{N_2(t+\Delta t)-N_2(t)}{\Delta t}=\log 2\left\{\frac{N_1(t)}{T_1}-\frac{N_2(t)}{T_2}\right\}\quad\cdots(3*)$$

(1) において $T_1\ll T_2$ のとき，$\frac{1}{T_2}\ll\frac{1}{T_1}$ である．はじめ N_2 が小さいため，$\frac{N_2(t)}{T_2}$ の項はほぼ 0 と考えてよい．すると，A_2 のグラフの傾きは正であり，傾きは $N_1(t)$ に比例するので少しずつゆるやかになる．よって，A_2 のグラフは ⑨ $\boxed{\text{い}}$.

(2) において，$T_2\ll T_1$ のとき，$\frac{1}{T_1}\ll\frac{1}{T_2}$ である．はじめ $N_2(t)$ はほぼ 0 であり，$\frac{N_1(t)}{T_1}$ の項の効果が出るがでることで A_2 のグラフの傾きが正になるが，すぐに $\frac{N_2(t)}{T_2}$ の方が大きくなり，崩壊をすることで A_2 の数が増えずに減少し続ける．適するグラフは ⑩ $\boxed{\text{え}}$

(3) において，$T_1=T_2=T$ とおくと $(*)$ より

$$\frac{N_2(t+\Delta t)-N_2(t)}{\Delta t}=\frac{\log 2}{T}\{N_1(t)-N_2(t)\}$$

はじめ $N_1(t)-N_2(t)>0$ で A_2 のグラフの傾きは正である．$N_1(t)=N_2(t)$ のとき，グラフの傾きは 0 となる．

その後，$N_1(t) - N_2(t) < 0$ となり，A_2 のグラフは ③ $\boxed{\text{き}}$．ちなみに ③ のグラフに ⑧ のグラフを描くと T_1 と $2T_1$ の間に交点をもつ．③ のグラフでは T_1 と $2T_1$ の間で傾きが 0 になっていることが確かめられる．