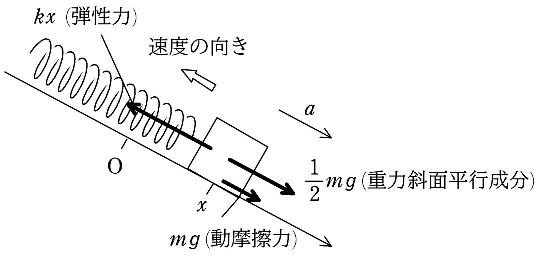
1.

(1) ばねが $\varDelta x$ 伸びているときに，重力の斜面平行下成分が $mg\sin 30^\circ = \dfrac{1}{2}mg$，弾性力が斜面上向きに $k\varDelta x$，斜面下向きに $\sqrt{3}mg\cos 30^\circ = \dfrac{3}{2}mg$ の最大静止摩擦力がはたらくときのつり合いの式より

$$k\varDelta x = \frac{1}{2}mg + \frac{3}{2}mg \qquad \therefore\quad \varDelta x = \boldsymbol{\frac{2mg}{k}}\ \text{(ア)}$$



自然長を原点として，斜面下向きに x 座標をとる．物体が座標 x のときの加速度 a を座標の向きにとる．物体の速度が斜面上向きであるから，動摩擦力 $\dfrac{2}{\sqrt{3}}mg\cos 30^\circ = mg$ が斜面下向きにはたらくことに注意をして運動方程式を立てると

$$ma = -kx + \frac{1}{2}mg + mg = -k\left(x - \frac{3mg}{2k}\right) \quad \cdots①$$

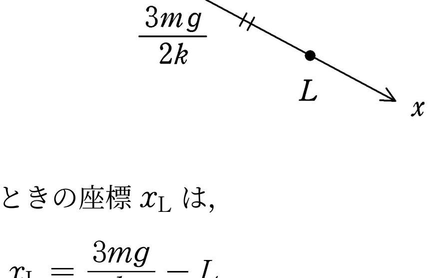
より，単振動の中心は $x = \dfrac{3mg}{2k}$ である．単振動において，速さが最大になるのは中心にあるときであるから，このときのばねの伸びは $\boldsymbol{\dfrac{3mg}{2k}}$ (イ)

また，物体は $x = L$ から速度 0 で運動を開始したので，その振幅は $L - \dfrac{3mg}{2k}$ であり，① の運動方程式より，角振動数は $\omega = \sqrt{\dfrac{k}{m}}$ である．よって，速さの最大値 $v_{\max}$ は

$$v_{\max} = \boldsymbol{\left(L - \frac{3mg}{2k}\right)\sqrt{\frac{k}{m}}}\ \text{(ウ)}$$

振動の周期は $\dfrac{2\pi}{\omega} = 2\pi\sqrt{\dfrac{m}{k}}$ であり，手を離してから，速さが最大になるまでの時間は $\dfrac{1}{4}$ 周期であるから，その時間は

$$\frac{1}{4}\times 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}} = \boldsymbol{\frac{\pi}{2}\sqrt{\frac{m}{k}}}\ \text{(エ)}$$



また，物体の速度がはじめて 0 になるときの座標 x_{L} は,

$$\frac{x_{\mathrm{L}} + L}{2} = \frac{3mg}{2k} \qquad \therefore\quad x_{\mathrm{L}} = \frac{3mg}{k} - L$$

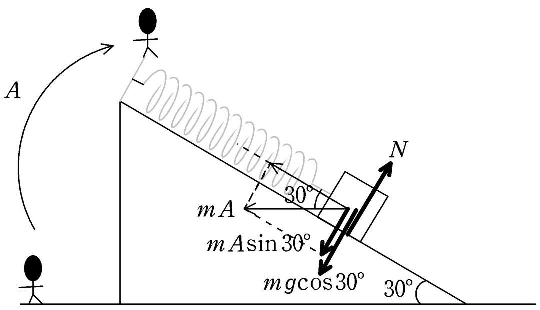
である．このとき，大きさ f の静止摩擦力が斜面上向きにはたらき，弾性力が $-kx_{\mathrm{L}} = -k\left(\dfrac{3mg}{k} - L\right)$，重力の斜面平行成分が $\dfrac{1}{2}mg$ である．これらのつり合いより

$$-f - k\left(\frac{3mg}{k} - L\right) + \frac{1}{2}mg = 0 \qquad \therefore\quad f = kL - \frac{5}{2}mg$$

$f > \sqrt{3}mg\cos 30^\circ = \dfrac{3}{2}mg$ より

$$kL - \frac{5}{2}mg > \frac{3}{2}mg \qquad \therefore \quad L > \boldsymbol{\frac{4mg}{k}}_{\text{(オ)}}$$

(2) 台から物体をみると，慣性力 $m\times(-A)$ がはたらく．台からみると物体にはたらく斜面垂直な方向の力はつり合っているので，垂直抗力の大きさを N として，



$$N = mA\sin 30^\circ + mg\cos 30^\circ = \boldsymbol{\frac{m}{2}\left(A+\sqrt{3}g\right)}_{\text{(カ)}}$$

速度を（水平右方向の速度，鉛直した方向の速度）でかく．物体の速度を $(V,\ 0)$ とする．台からみた物体の速度が $(v\cos 30^\circ,\ v\sin 30^\circ)$ であるから，床からみた物体の速度は

$$(V,\ 0) + (v\cos 30^\circ,\ v\sin 30^\circ) = \left(V + \frac{\sqrt{3}}{2}v,\ \frac{1}{2}v\right)$$

である．物体と台にはたらく水平方向の力の和はゼロなので，水平方向は運動量が保存する．運動量保存則より

$$m\left(V + \frac{\sqrt{3}}{2}v\right) + 2mV = 0 \qquad \therefore \quad V = \boldsymbol{-\frac{\sqrt{3}}{6}v}_{\text{(キ)}}$$

よって，床からみた物体の速度は $\left(\dfrac{\sqrt{3}}{3}v,\ \dfrac{1}{2}v\right)$，台の速度は $\left(-\dfrac{\sqrt{3}}{6}v,\ 0\right)$ となる．運動エネルギーの合計 K は

$$K = \frac{1}{2}m\left\{\left(\frac{\sqrt{3}}{3}v\right)^2 + \left(\frac{1}{2}v\right)^2\right\} + \frac{1}{2}\cdot 2m\cdot\left(\frac{\sqrt{3}}{6}v\right)^2 = \boldsymbol{\frac{3}{8}mv^2}_{\text{(ク)}}$$

振幅を B とし，最大の速さを v とすると，力学的エネルギー保存則より，

$$\frac{3}{8}mv^2 = \frac{1}{2}kB^2$$

さらに，角振動数を ω' として，$v = B\omega'$ の関係を上式に代入して B を消去すると

$$\frac{3}{8}mv^2 = \frac{1}{2}k\left(\frac{v}{\omega'}\right)^2 \qquad \therefore \quad \omega' = \sqrt{\frac{4k}{3m}}$$

よって，周期は $T' = \dfrac{2\pi}{\omega'} = \boldsymbol{\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}}_{\text{(ケ)}}$

◀　運動方程式から周期を考える場合は次のようになる．

(1) と同様に斜面上に座標を設定する．このとき，台からみた物体の運動方程式は慣性力がはたらくことに注意をして

$$ma = -kx + mg\sin 30^\circ - mA\cos 30^\circ = -kx + \frac{1}{2}mg - \frac{\sqrt{3}}{2}mA \quad \cdots②$$

また，台にはたらく水平方向の力はばねから $kx\cos 30^\circ = \dfrac{\sqrt{3}}{2}kx$ と，(カ) の結果を用いて，物体からの垂直抗力の水平成分は

$$-N\sin 30^\circ = -\frac{m}{4}\left(A+\sqrt{3}g\right)$$

であるから，台の水平方向の運動方程式は

$$2mA=\frac{\sqrt{3}}{2}kx-\frac{m}{4}\left(A+\sqrt{3}g\right)\qquad \therefore\quad A=\frac{\sqrt{3}}{9m}(2kx-mg)\quad \cdots③$$

③ を ② に代入して

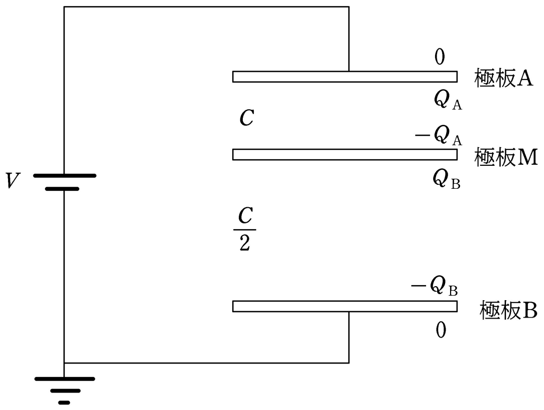
$$ma=-kx+\frac{1}{2}mg-\frac{\sqrt{3}}{2}m\cdot\frac{\sqrt{3}}{9m}(2kx-mg)=-\frac{4}{3}k\left(x-\frac{1}{2}mg\right)$$

よって，角振動数は $\omega'=\sqrt{\dfrac{4k}{3m}}$ であり，周期は $T'=\dfrac{2\pi}{\omega'}=\pi\sqrt{\dfrac{3m}{k}}$

2.

(1) 距離 d の平行板コンデンサー AM の電気容量が C なので，距離 $2d$ の平行板コンデンサー BM の電気容量は $\boldsymbol{\frac{C}{2}}$ (ア)

(2) アースが繋がれているので，A と B の，M 向いていない側の表面の電荷は 0 である．*1

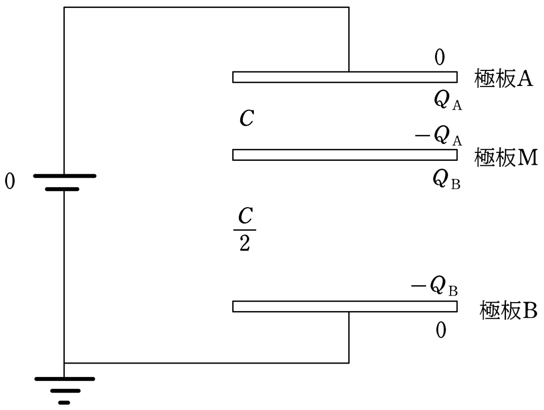


電荷を下図のように設定する．AM の電圧は $Q_A = CV_{AM}$ より，$V_{AM} = \dfrac{Q_A}{C}$．BM の電圧は $Q_B = \dfrac{C}{2}V_{BM}$ より，$V_{BM} = \dfrac{2Q_B}{C}$．電荷保存則と回路の式（AM の電圧と BM の電圧の和が V）より

$$\begin{cases} -Q_A + Q_B = 0 \\ \dfrac{Q_A}{C} + \dfrac{2Q_B}{C} = V \end{cases} \qquad \therefore \quad Q_A = Q_B = \frac{1}{3}CV$$

よって，M の下側の表面の電荷は $\boldsymbol{\frac{1}{3}CV}$ (イ)

(3) 電荷を下図のように設定する．A，B 間の電圧が 0 であることに注意して，電荷保存則と回路の式を立てると



$$\begin{cases} -Q_A + Q_B = Q \\ \dfrac{Q_A}{C} + \dfrac{2Q_B}{C} = 0 \end{cases} \qquad \therefore \quad Q_A = -\frac{2}{3}Q,\ Q_B = \frac{1}{3}Q$$

よって，M の下側の表面の電荷は $\boldsymbol{\frac{1}{3}Q}$ (ウ)．また，M と B の間の空間に蓄えられた静電エネルギー U_{BM} は

$$U_{BM} = \frac{1}{2}\cdot\frac{Q_B^2}{\frac{C}{2}} = \frac{1}{C}\left(\frac{1}{3}Q\right)^2 = \boldsymbol{\frac{Q^2}{9C}}$$ (エ)

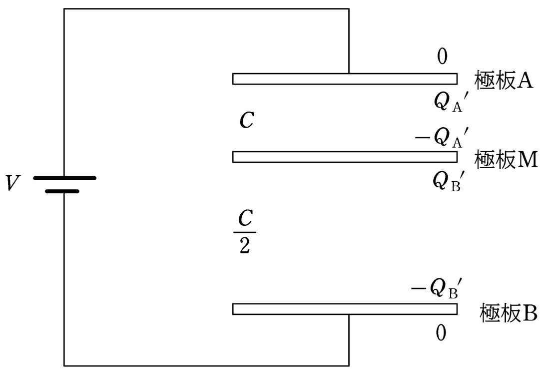
*1 極板 B の下側部分とその下側でガウスの法則を考えればよい．

A に対する M の電位は $V_{\mathrm{MA}}=\dfrac{-Q_{\mathrm{A}}}{C}=\dfrac{2Q}{3C}$ であり，電場の大きさは $E_{\mathrm{MA}}=\dfrac{V_{\mathrm{MA}}}{d}=\dfrac{2Q}{3Cd}$ である．また，M に対する B の電位は $V_{\mathrm{MB}}=\dfrac{Q_{\mathrm{B}}}{\frac{C}{2}}=\dfrac{2Q}{3C}$ であり，電場の大きさは $E_{\mathrm{MB}}=\dfrac{V_{\mathrm{MB}}}{2d}=\dfrac{Q}{3Cd}$ である．

一般に，平行板コンデンサーの電場の大きさを E'，蓄えている電荷を Q' (> 0) とすると，極板間引力の大きさは $F'=Q\times\dfrac{E'}{2}$ である．よって，M が受ける静電気力の合計は

$$
\begin{aligned}
F &= |Q_{\mathrm{A}}|\times\frac{E_{\mathrm{MA}}}{2}-Q_{\mathrm{B}}\times\frac{E_{\mathrm{MB}}}{2}\\
&=\frac{2}{3}Q\times\frac{1}{2}\cdot\frac{2Q}{3Cd}-\frac{1}{3}Q\times\frac{1}{2}\cdot\frac{Q}{3Cd}=\boldsymbol{\frac{Q^2}{6Cd}}_{(オ)}
\end{aligned}
$$

直流電源の電圧をゆっくり上げて電圧を V としたときの電荷分布を上のように設定する．*2



電荷保存則および回路の式を立てると

$$
\begin{cases}
-Q_{\mathrm{A}}'+Q_{\mathrm{B}}'=Q\\
\dfrac{Q_{\mathrm{A}}'}{C}+\dfrac{Q_{\mathrm{B}}'}{\frac{C}{2}}=V
\end{cases}
\qquad \therefore\quad Q_{\mathrm{A}}'=\frac{1}{3}(CV-2Q),\qquad Q_{\mathrm{B}}'=\frac{1}{3}(CV+Q)
$$

よって，M の下側の電荷は $=\boldsymbol{\dfrac{1}{3}(CV+Q)}_{(カ)}$

このとき，コンデンサー AM とコンデンサー BM の静電エネルギーの和 U' は

$$
\begin{aligned}
U' &= \frac{Q_{\mathrm{A}}'^2}{2C}+\frac{Q_{\mathrm{B}}'^2}{2\cdot\frac{C}{2}}\\
&=\frac{1}{2C}\left\{\frac{1}{3}(CV-2Q)\right\}^2+\frac{1}{C}\left\{\frac{1}{3}(CV+Q)\right\}^2\\
&=\frac{1}{6}CV^2+\frac{Q^2}{3C}\quad\cdots①
\end{aligned}
$$

また，電圧が 0 のときの静電エネルギーの和は

$$
\begin{aligned}
U &= \frac{Q_{\mathrm{A}}^2}{2C}+\frac{Q_{\mathrm{B}}^2}{2\cdot\frac{C}{2}}\\
&=\frac{1}{2C}\left(-\frac{2}{3}Q\right)^2+\frac{1}{C}\left(\frac{1}{3}Q\right)^2=\frac{Q^2}{3C}\quad\cdots②
\end{aligned}
$$

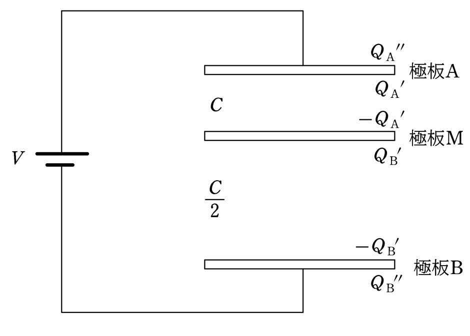
---

*2

今回も A，B の外側の電荷はゼロである．
直流電源の電圧をゆっくり上げて電圧を V としたときの電荷分布を上のように設定する．電荷保存則より

$$
\begin{cases}
-Q_{\mathrm{A}}'+Q_{\mathrm{B}}'=Q\\
Q_{\mathrm{A}}'+Q_{\mathrm{A}}''-Q_{\mathrm{B}}'+Q_{\mathrm{B}}''=-Q
\end{cases}
$$

さらに，問題文に書かれているように，$Q_{\mathrm{A}}''=Q_{\mathrm{B}}''$ を考慮すると，$Q_{\mathrm{A}}''=Q_{\mathrm{B}}''=0$ を得る．

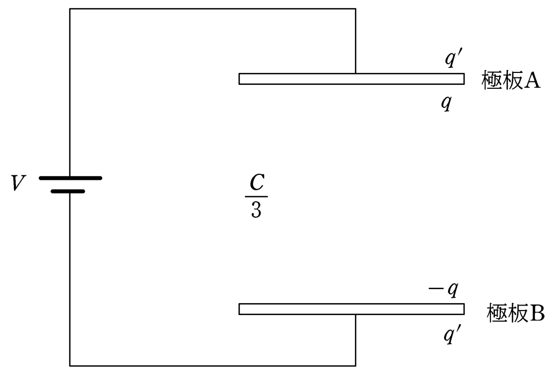


①, ② より，静電エネルギー変化は

$$\varDelta U = U' - U = \frac{1}{6}CV^2$$

電池がした仕事は静電エネルギー変化に等しい．よって，電池がした仕事は $\boldsymbol{\frac{1}{6}CV^2}$ (キ)

(4) 極板 M を引き抜いた後の電荷分布を下図のように設定する．



このとき，AB 間の距離が $3d$ なので，電気容量は $\frac{C}{3}$ である．電荷保存則より，

$$q' + q + (-q) + q' = -Q \qquad \therefore \quad q' = -\frac{Q}{2}$$

また，コンデンサーの基本式より

$$q = \frac{C}{3} \times V = \frac{1}{3}CV$$

よって，極板 A 全体の電荷は $q' + q = \boldsymbol{-\frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}CV}$ (ク)

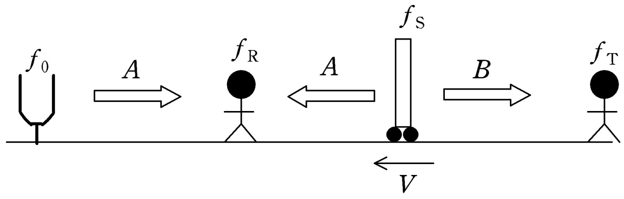
また，A の電荷の変化分 $\varDelta Q_{\mathrm{A}}$ は

$$\varDelta Q_{\mathrm{A}} = -\frac{1}{2}Q + \frac{1}{3}CV - \frac{1}{3}(CV - 2Q) = \frac{1}{6}Q$$

よって，電池がした仕事は

$$\frac{1}{6}Q \times V = \boldsymbol{\frac{1}{6}QV}$$ (ケ)

3.



入射波の振動数を f_0，境界面が受け取る振動数を f_S*3，反射波の振動数を f_R*4，透過波の振動数を f_T*5とする．ドップラー効果の式より

$$f_S = \frac{A+V}{A}f_0 \quad \cdots ①$$
$$f_R = \frac{A}{A-V}f_S \quad \cdots ②$$
$$f_T = \frac{B}{B+V}f_S \quad \cdots ③$$

①, ② より，反射波の振動数は

$$f_R = \frac{A}{A-V}\cdot\frac{A+V}{A}f_0 = \underbrace{\boldsymbol{\frac{A+V}{A-V}}}_{(ア)}\times f_0$$

①, ③ より，透過波の振動数は

$$f_T = \frac{B}{B+V}\cdot\frac{A+V}{A}f_0 = \underbrace{\boldsymbol{\frac{B(A+V)}{(B+V)A}}}_{(イ)}\times f_0$$

また，透過波の波長 λ_R は

$$\lambda_R = \frac{B+V}{f_S} = \frac{B+V}{\frac{A+V}{A}f_0} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{B+V}{A+V}}}_{(ウ)}\times\frac{A}{f_0}$$

また，入射波の進行方向が境界面に垂直でない場合，境界面が波源に近づく速度は $V\cos x$ であるから，① について $V\to V\cos x$ として

$$f'_S = \frac{A+V\cos x}{A}f_0 \quad \cdots ④$$

さらに，反射波を考える際，境界面の反射波が伝わる方向の速度成分は $V\cos y$ で，屈折波の方向の速度成分は $V\cos z$ であるから，② において，$V\to V\cos y$，③ において，$V\to V\cos z$ として

$$f'_R = \frac{A}{A-V\cos y}f'_S \quad \cdots ⑤$$

$$f'_T = \frac{B}{B+V\cos z}f'_S \quad \cdots ⑥$$

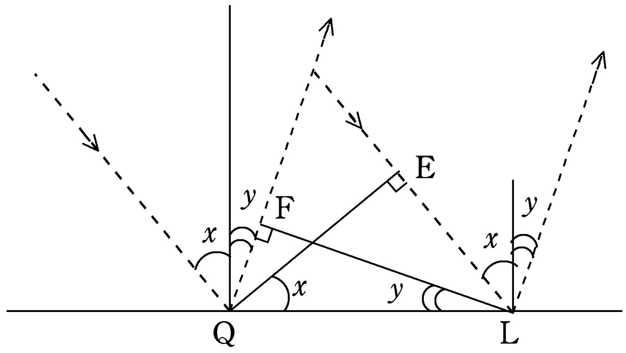
④, ⑥ より

$$f'_T = \frac{B}{B+V\cos z}\cdot\frac{A+V\cos x}{A}f_0 = \underbrace{\boldsymbol{\frac{B(A+V\cos x)}{(B+V\cos z)A}}}_{(エ)}\times f_0$$

また，透過波の波長は

$$\lambda'_T = \frac{B+V\cos z}{f'_S} = \frac{B+V\cos z}{\frac{A+V\cos x}{A}f_0} = \underbrace{\boldsymbol{\frac{B+V\cos z}{A+V\cos x}}}_{(オ)}\times\frac{A}{f_0}$$

*3 面 (surface) の頭文字 S を用いた．
*4 反射波 (reflected wave) の頭文字 R を用いた．
*5 反射波 (transmitted wave) の頭文字 T を用いた．



$\lambda_0 = \dfrac{A}{f_0}$ を入射波の波長とする．EL $= \lambda_0$，FQ $= \lambda_{\mathrm{R}}$ である．△EQL の三角比を考えて

$$\sin x = \frac{\mathrm{EL}}{\mathrm{QL}} = \frac{\lambda_0}{\mathrm{QL}} \quad \cdots ⑦$$

△FLQ の三角比を考えて

$$\sin y = \frac{\mathrm{QF}}{\mathrm{QL}} = \frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{\mathrm{QL}} \quad \cdots ⑧$$

⑦, ⑧ から QL を消去して

$$\frac{\lambda_{\mathrm{R}}}{\lambda_0} = \boldsymbol{\frac{\sin y}{\sin x}}_{\text{（カ）}}$$

同様に考えて[*6]

$$\frac{\lambda_{\mathrm{T}}}{\lambda_0} = \boldsymbol{\frac{\sin z}{\sin x}}_{\text{（キ）}}$$

[*6] 屈折の法則を考えてもよい．