

[I]

(1) 容器 1 側について、液面より $2h_0$ 下の圧力は同じ深さの容器 2 の液面の圧力と同じである。このことから、単位面積あたりのつり合いの式より

$$p_1 + \rho \cdot 2h_0 g = p_0 \quad \therefore \quad p_1 = p_0 - 2\rho h_0 g_{(\text{h})}$$

$$(2) U_A = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times RT_1 = \frac{3}{4} RT_1 (\text{e})$$

$$(3) U_B = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times RT_1 = \frac{5}{4} RT_1 (\text{g})$$

(4) ピストンに重さはなく、つり合っているので、常に気体 A と気体 B の圧力は等しい。両気体の圧力、温度、物質量が同じであるから、体積も同じになる。よって、A の高さが $2h_0$ まで増えたら、B の高さも $2h_0 (\text{l})$ まで増える。

(5) 容器 1 の液面と容器 2 の液面の差が $2h_0$ に保たれていることから、両気体の圧力は一定である。断面積を S として、シャルルの法則より

$$\frac{S \times 2h_0}{T_2} = \frac{S \times h_0}{T_1} \quad \therefore \quad T_2 = 2T_1 (\text{l})$$

(6) 気体 A、B の物質量を $n [\text{mol}]$ とおく。また、 $\Delta T = T_2 - T_1$ とする。また、A、B それぞれの内部エネルギー変化を ΔU_A 、 ΔU_B 、気体がした仕事を W_A 、 W_B とする。このとき、

$$\Delta U_A = \frac{3}{2} nR \Delta T, \quad \Delta U_B = \frac{5}{2} nR \Delta T$$

また、定圧変化であるから、

$$W_A = W_B = p_1 \times S(2h_0 - h_0) = nR \Delta T$$

これらから、熱力学第一法則より

$$Q_A = \Delta U_A + W_A = \frac{5}{2} nR \Delta T$$

$$Q_B = \Delta U_B + W_B = \frac{7}{2} nR \Delta T$$

よって、

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{\frac{7}{2} nR \Delta T}{\frac{5}{2} nR \Delta T} = \frac{7}{5} (\text{i})$$

(7) ヒータから加えられた熱量のうち、気体がした仕事の割合は

$$\frac{W_A + W_B}{Q_A + Q_B} = \frac{nR \Delta T + nR \Delta T}{\frac{5}{2} nR \Delta T + \frac{7}{2} nR \Delta T} = \frac{1}{3} (\text{a})$$

(8)

$$\frac{Q_A + Q_B}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{5}{2} nR \Delta T + \frac{7}{2} nR \Delta T}{\Delta T} = 6nR = 6 \times \frac{1}{2} \times R = 3R (\text{n})$$

(9) モル比熱 C の定義は $C = \frac{\text{(熱量)}}{\text{(物質量)} \times \text{(温度变化)}}$ であるから、定圧モル比熱 C_p は

$$C_p = \frac{Q_A + Q_B}{2n \Delta T} = \frac{\frac{5}{2} nR \Delta T + \frac{7}{2} nR \Delta T}{2n \Delta T} = 3R$$

定積モル比熱を C_V として、マイヤーの関係より、 $C_p - C_V = R$ から

$$C_V = C_p - R = 3R - R = 2R (\text{l})$$

となる。

(10) 比熱比 γ は

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{3R}{2R} = \frac{3}{2}(\mathbf{j})$$

(11) (4) と同様に考えて, $2h_0(\mathbf{l})$

(12) 比熱比が γ のとき, ポアソンの式 $PV^\gamma = \text{一定}$ が成り立ち, 状態方程式 $PV = nRT$ を変形した $P = \frac{nRT}{V}$ を代入する

$$\frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = \text{一定} \quad \therefore \quad TV^{\gamma-1} = nR \times (\text{一定}) = \text{一定}$$

が成り立つ. (10) で考えたように比熱比は $\gamma = \frac{3}{2}$ であるから,

$$T_3 \times (4h_0S)^{\frac{3}{2}-1} = T_1 \times (2h_0S)^{\frac{3}{2}-1} \quad \therefore \quad T_3 = 2^{-\frac{1}{2}}T_1(\mathbf{c})$$

(13) また, 気体 A だけ別な容器に閉じ込めた断熱変化を考えるときは, 比熱比は $\frac{5}{3}$ (单原子分子理想気体) なので, ポアソンの式より

$$T_4 \times (2h_0S)^{\frac{5}{3}-1} = T_1 \times (h_0S)^{\frac{5}{3}-1} \quad \therefore \quad T_4 = 2^{-\frac{2}{3}}T_1(\mathbf{e})$$

(14) (12), (13) より, $T_4 < T_3$ である. つまり, 気体 A 単体で断熱変化させたときより, 気体 A と気体 B 全体で断熱変化したときの方が気体 A の温度が高い. これは気体 B から気体 A に熱が移動したからである. (b)

[II]

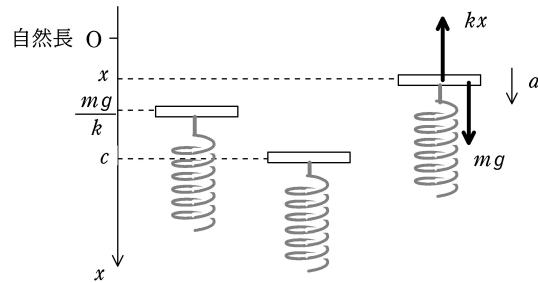
問 1 ばねの縮みを Δx として、おもり 1 のつり合いより

$$k\Delta x = mg \quad \therefore \quad \Delta x = \frac{mg}{k}$$

問 2 ばねの伸びを Δx とする。おもり 2 に床からはたらく垂直抗力が 0 のとき、おもり 2 のつり合いより

$$k\Delta x = 2mg \quad \therefore \quad \Delta x = \frac{2mg}{k}$$

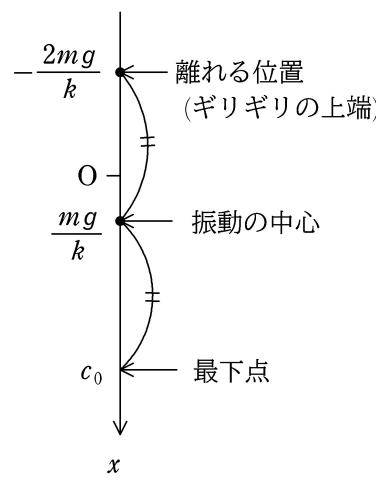
問 3 ばねが自然長になるときのおもり 1 の位置を原点 O とし、鉛直下向きに x 座標をとる。位置 x における加速度を a として、おもり 1 の運動方程式を立てると



$$ma = -kx + mg = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

より、中心座標は $x = \frac{mg}{k}$ で、ここがつり合いの位置である。自然長より c だけ下に移動させてそっとはなしたので、振幅は $c - \frac{m}{k}$ であり、運動方程式より、周期は $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

問 4 問 2 より、おもり 2 が床から離れるのは自然長より、 $\frac{2mg}{k}$ 伸びたときである。



問 3 で設定した座標で考えると、離れる位置は $x = -\frac{2mg}{k}$ である。また、中心が $x = \frac{mg}{k}$ 、最下点が c_0 である。離れる位置と最下点の中点が振動の中心になるときを考えて

$$\frac{mg}{k} = \frac{-\frac{2mg}{k} + c_0}{2} \quad \therefore \quad c_0 = \frac{4mg}{k}$$

問 5 ばねの縮みを Δx とする。おもり 1 とおもり 3 全体のつり合いの式から

$$k\Delta x = mg + 2mg \quad \therefore \quad \Delta x = \frac{3mg}{k}$$

問 6 衝突直前のおもり 3 の速さを v とすると、力学的エネルギー保存則より

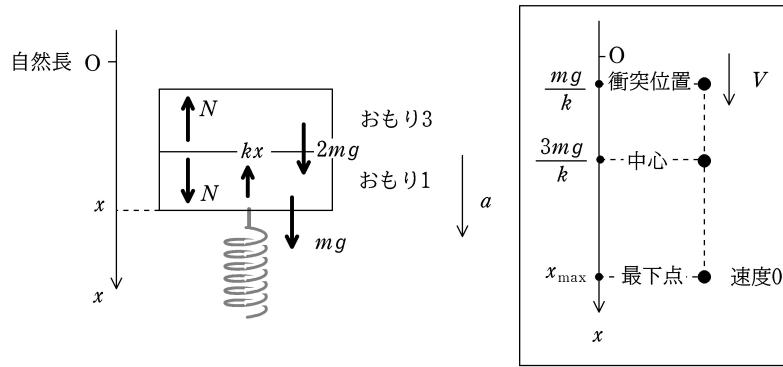
$$\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v^2 = 2m \cdot gh \quad \therefore \quad v = \sqrt{2gh}$$

衝突直後のおもり 1 とおもり 3 の下向きの速度を V とする。衝突直前後の鉛直方向の運動量保存則より

$$mV + 2mV = 2m\sqrt{2gh} \quad \therefore \quad V = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$$

問 7 おもり 1 とおもり 3 が一体となっている間の座標 x における加速度を a 、おもり 1 とおもり 3 の間にはたらく垂直抗力の大きさを N として、おもり 1, おもり 3 それぞれの運動方程式を立てると

$$\begin{cases} (\text{おもり } 1) : ma = -kx + mg + N & \cdots \textcircled{1} \\ (\text{おもり } 3) : 2ma = 2mg - N & \cdots \textcircled{2} \end{cases}$$



① + ② より

$$3ma = -kx + 3mg = -k\left(x - \frac{3mg}{k}\right) \quad \cdots \textcircled{3}$$

であるから、中心座標は $\frac{3mg}{k}$ である。最下点の座標を x_{\max} として、単振動のエネルギー保存則より¹

$$0 + \frac{1}{2}k\left(x_{\max} - \frac{3mg}{k}\right)^2 = \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} - \frac{3mg}{k}\right)^2$$

$$\therefore x_{\max} = \frac{mg}{k} \left\{ 3 + 2\sqrt{1 + \frac{2kh}{3mg}} \right\} \quad \cdots \textcircled{4}$$

問 8 ③を①に代入して、 a を消去して N 式をつくると

$$N = 2mg - 2ma = 2mg - 2 \cdot \left\{ -\frac{k}{3}\left(x - \frac{3mg}{k}\right) \right\} = \frac{2}{3}kx \quad \cdots \textcircled{5}$$

よって、 $x = d$ のとき、 $N = \frac{2}{3}kd$

問 9 ⑤より、 $N = 0$ のとき、 $x = 0$ 、つまりねの自然長からの伸びの大きさは 0。また、このとき、弾性力は 0 なのである。おもり 2 にはたらく垂直抗力の大きさを R として、おもり 2 のつり合いより、

$$R = 2mg$$

問 10 振動の上端が $x = 0$ になればよい。上端と中心の距離は $\frac{3mg}{k}$ であるから、最下点の座標は $\frac{6mg}{k}$ である。これを④の x_{\max} に代入して

$$\frac{6mg}{k} = \frac{mg}{k} \left\{ 3 + 2\sqrt{1 + \frac{2kh_0}{3mg}} \right\} \quad \therefore \quad h_0 = \frac{15mg}{8k}$$

¹ 速度を u として、 $\frac{1}{2} \cdot 3m \cdot u^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{3mg}{k}\right)$ = 一定 が成り立つ。

[III]

問 1 接点 $2k - 1$ におけるキルヒホッフ第 1 法則より, $I_{2k-1} = I_{2k-3} + I_{2k-2}$ …①

問 2 接点 $2k + 1$ の電位を V_{2k+1} として, 「接点 $2k + 1$ 」 → 「接点 $2k - 1$ 」 → 「接点 $2k$ 」についての電圧降下を考えて

$$V_{2k+1} - R_1 I_{2k-1} - R_1 I_{2k-2} = 0 \quad \therefore V_{2k+1} = R_1 (I_{2k-1} + I_{2k-2}) \quad \cdots \text{②}$$

問 3 「接点 $2k + 1$ 」 → 「接点 $2k + 2$ 」の電圧降下を考えて

$$V_{2k+1} - R_1 I_{2k} = 0 \quad \therefore V_{2k+1} = R_1 I_{2k} \quad \cdots \text{③}$$

②, ③ より,

$$R_1 I_{2k} = R_1 (I_{2k-1} + I_{2k-2}) \quad \therefore I_{2k} = I_{2k-2} + I_{2k-1} \quad \cdots \text{④}$$

問 4 まず, 接点 1 と接点 2 の電圧は接点 3 と接点 4 の電圧と等しいく, その間の抵抗がともに R_1 であるから, $I_1 = I_2$ である. そこで, $k = 2$ を ① に代入すると

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2I_1$$

さらに ④ に $k = 2$ を代入して

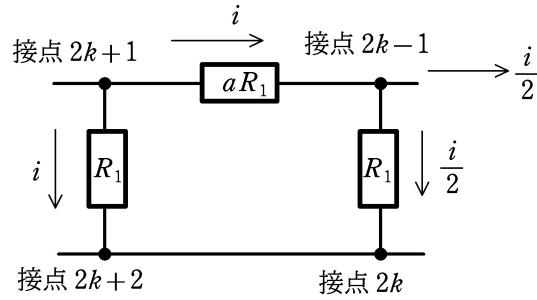
$$I_4 = I_2 + I_3 = I_1 + 2I_1 = 3I_1$$

これらを繰り返して

$$I_5 = I_3 + I_4 = 5I_1, \quad I_6 = I_4 + I_5 = 8I_1, \quad I_7 = I_5 + I_6 = 13I_1, \quad I_8 = I_6 + I_7 = 21I_1$$

$$I_9 = I_7 + I_8 = 34I_1, \quad I_{10} = I_8 + I_9 = 55I_1, \quad I_{11} = I_9 + I_{10} = 89I_1$$

問 5 図のように, $I_{2k-1} = I_{2k} = i$ とおくと, $I_{2k-2} = \frac{i}{2}$ である. 「接点 $2k + 1$ 」 → 「接点 $2k - 1$ 」 → 「接点 $2k$ 」 → 「接点 $2k + 2$ 」 → 「接点 $2k + 1$ 」の回路の式を立てて



$$V_{2k+1} - aR_1 i - R_1 \cdot \frac{i}{2} + R_1 i = V_{2k+1} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

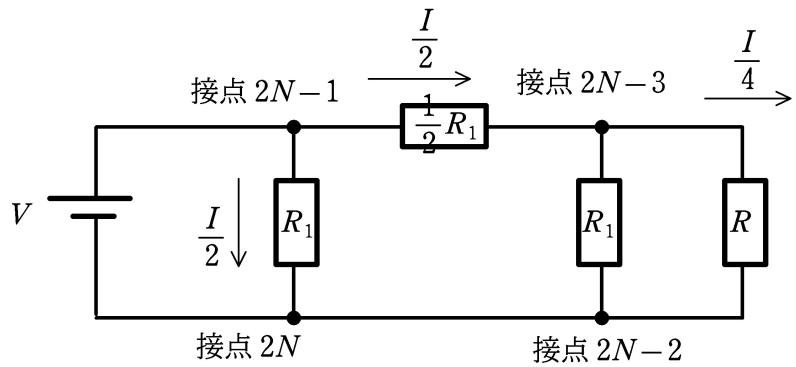
問 6 $I_2 = I_1$ であり, $I_3 = 2I_2 = 2I_1$, $I_5 = 2I_3 = 2^2I_1$, …, $I_{2k-1} = 2^{k-1}I_1$, …, $I_{2N-3} = I_{2(N-1)+1} = 2^{N-2}I_1$ である. よって, $I = 2I_{2N-3} = 2^{N-1}I_1$

問 7 $I_{2N-2} = I_{2N-3} = \frac{I}{2}$ である. 「電源」 → 「接点 $2N - 1$ 」 → 「接点 $2N$ 」の回路の式から

$$V - R_1 \cdot \frac{I}{2} = 0 \quad \therefore I = \frac{2V}{R_1}$$

問 8 抵抗 R に流れる電流は $\frac{I}{4}$ である. また, 接点 $2N - 3$ の電位は, 問 7 の $I = \frac{2V}{R_1}$ を用いて

$$V - \frac{1}{2}R_1 \cdot \frac{I}{2} = V - \frac{R_1}{4} \cdot \frac{2V}{R_1} = \frac{V}{2}$$



であるから、抵抗 R にかかる電圧は $\frac{V}{2}$ よって、オームの法則より

$$\begin{aligned} \frac{V}{2} &= R \times \frac{I}{4} \\ \therefore R &= \frac{2V}{I} = 2V \times \frac{R_1}{2V} = R_1 \end{aligned}$$

問9 図5における抵抗部分について合成すると、(並列合成してから直列合成) $\frac{8}{5}R_1 = \frac{8}{5} \times 25 = 40\Omega$ である。そこで、リアクタンス 60Ω のコンデンサーと 100Ω のコイルと抵抗値 40Ω の直列回路を考える。位相のずれに注意して、回路の式を立てる。 $I_0 = 100\text{mA} = 0.100\text{A}$ とする。

$$\begin{aligned} V_0 \sin(\omega t + \phi) - 60 \times 0.100 \times \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - 100 \times 0.100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - 40 \times 0.100 \sin \omega t &= 0 \\ \therefore V_0 \sin(\omega t + \phi) &= 4\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots (*) \end{aligned}$$

よって、 $V_0 = 4\sqrt{2} \doteq 5.6\text{V}$

問10 (*) より、 $\phi = \frac{\pi}{4}$