

[I]

- (1) 容器 1 側について、液面より  $2h_0$  下の圧力は同じ深さの容器 2 の液面の圧力と同じである。このことから、単位面積あたりのつり合いの式より

$$p_1 + \rho \cdot 2h_0 g = p_0 \quad \therefore \quad p_1 = p_0 - 2\rho h_0 g \text{ (h)}$$

$$(2) U_A = \frac{3}{2} \times \frac{1}{2} \times RT_1 = \frac{3}{4} RT_1 \text{ (e)}$$

$$(3) U_B = \frac{5}{2} \times \frac{1}{2} \times RT_1 = \frac{5}{4} RT_1 \text{ (g)}$$

- (4) ピストンに重さはなく、つり合っているから、常に気体 A と気体 B の圧力は等しい。両気体の圧力、温度、物質量が同じであるから、体積も同じになる。よって、A の高さが  $2h_0$  まで増えたら、B の高さも  $2h_0$  (1) まで増える。

- (5) 容器 1 の液面と容器 2 の液面の差が  $2h_0$  に保たれていることから、両気体の圧力は一定である。断面積を  $S$  として、シャルルの法則より

$$\frac{S \times 2h_0}{T_2} = \frac{S \times h_0}{T_1} \quad \therefore \quad T_2 = 2T_1 \text{ (1)}$$

- (6) 気体 A, B の物質量を  $n$  [mol] とおく。また、 $\Delta T = T_2 - T_1$  とする。また、A, B それぞれの内部エネルギー変化を  $\Delta U_A$ ,  $\Delta U_B$ , 気体がした仕事を  $W_A$ ,  $W_B$  とする。このとき、

$$\Delta U_A = \frac{3}{2} nR\Delta T, \quad \Delta U_B = \frac{5}{2} nR\Delta T$$

また、定圧変化であるから、

$$W_A = W_B = p_1 \times S(2h_0 - h_0) = nR\Delta T$$

これらから、熱力学第一法則より

$$Q_A = \Delta U_A + W_A = \frac{5}{2} nR\Delta T$$

$$Q_B = \Delta U_B + W_B = \frac{7}{2} nR\Delta T$$

よって、

$$\frac{Q_B}{Q_A} = \frac{\frac{7}{2} nR\Delta T}{\frac{5}{2} nR\Delta T} = \frac{7}{5} \text{ (i)}$$

- (7) ヒータから加えられた熱量のうち、気体がした仕事の割合は

$$\frac{W_A + W_B}{Q_A + Q_B} = \frac{nR\Delta T + nR\Delta T}{\frac{5}{2} nR\Delta T + \frac{7}{2} nR\Delta T} = \frac{1}{3} \text{ (a)}$$

(8)

$$\frac{Q_A + Q_B}{T_2 - T_1} = \frac{\frac{5}{2} nR\Delta T + \frac{7}{2} nR\Delta T}{\Delta T} = 6nR = 6 \times \frac{1}{2} \times R = 3R \text{ (n)}$$

- (9) モル比熱  $C$  の定義は  $C = \frac{\text{(熱量)}}{\text{(物質量)} \times \text{(温度変化)}}$  であるから、定圧モル比熱  $C_p$  は

$$C_p = \frac{Q_A + Q_B}{2n\Delta T} = \frac{\frac{5}{2} nR\Delta T + \frac{7}{2} nR\Delta T}{2n\Delta T} = 3R$$

定積モル比熱を  $C_v$  として、マイヤーの関係より、 $C_p - C_v = R$  から

$$C_v = C_p - R = 3R - R = 2R \text{ (1)}$$

となる。

(10) 比熱比  $\gamma$  は

$$\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{3R}{2R} = \frac{3}{2} \text{ (j)}$$

(11) (4) と同様に考えて,  $2h_0$ (I)

(12) 比熱比が  $\gamma$  のとき, ポアソンの式  $PV^\gamma = \text{一定}$  が成り立ち, 状態方程式  $PV = nRT$  を変形した  $P = \frac{nRT}{V}$  を代入すると

$$\frac{nRT}{V} \cdot V^\gamma = \text{一定} \quad \therefore TV^{\gamma-1} = nR \times (\text{一定}) = \text{一定}$$

が成り立つ. (10) で考えたように比熱比は  $\gamma = \frac{3}{2}$  であるから,

$$T_3 \times (4h_0S)^{\frac{3}{2}-1} = T_1 \times (2h_0S)^{\frac{3}{2}-1} \quad \therefore T_3 = 2^{-\frac{1}{2}} T_1 \text{ (c)}$$

(13) また, 気体 A だけ別な容器に閉じ込めた断熱変化を考えると, 比熱比は  $\frac{5}{3}$  (単原子分子理想気体) なので, ポアソンの式より

$$T_4 \times (2h_0S)^{\frac{5}{3}-1} = T_1 \times (h_0S)^{\frac{5}{3}-1} \quad \therefore T_4 = 2^{-\frac{2}{3}} T_1 \text{ (e)}$$

(14) (12), (13) より,  $T_4 < T_3$  である. つまり, 気体 A 単体で断熱変化させたときより, 気体 A と気体 B 全体で断熱変化したときの方が気体 A の温度が高い. これは気体 B から気体 A に熱が移動したからである. (b)

## [ II ]

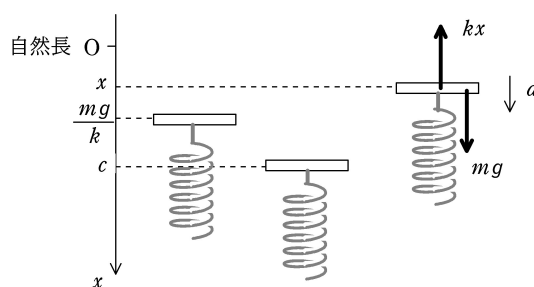
問 1 バネの縮みを  $\Delta x$  として、おもり 1 のつり合いより

$$k\Delta x = mg \quad \therefore \Delta x = \frac{mg}{k}$$

問 2 バネの伸びを  $\Delta x$  とする．おもり 2 に床からはたらく垂直抗力が 0 のとき，おもり 2 のつり合いより

$$k\Delta x = 2mg \quad \therefore \Delta x = \frac{2mg}{k}$$

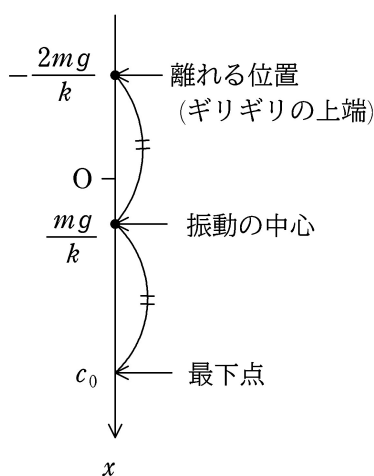
問 3 バネが自然長になるときのおもり 1 の位置を原点 O とし，鉛直下向きに  $x$  座標をとる．位置  $x$  における加速度を  $a$  とし，おもり 1 の運動方程式を立てると



$$ma = -kx + mg = -k\left(x - \frac{mg}{k}\right)$$

より，中心座標は  $x = \frac{mg}{k}$  で，ここがつり合いの位置である．自然長より  $c$  だけ下に移動させてそっとはなしたので，振幅は  $c - \frac{m}{k}$  であり，運動方程式より，周期は  $2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$

問 4 問 2 より，おもり 2 が床から離れるのは自然長より， $\frac{2mg}{k}$  伸びたときである．



問 3 で設定した座標で考えると，離れる位置は  $x = -\frac{2mg}{k}$  である．また，中心が  $x = \frac{mg}{k}$ ，最下点が  $c_0$  である．離れる位置と最下点の midpoint が振動の中心になるときを考えて

$$\frac{mg}{k} = \frac{-\frac{2mg}{k} + c_0}{2} \quad \therefore c_0 = \frac{4mg}{k}$$

問 5 バネの縮みを  $\Delta x$  とする．おもり 1 とおもり 3 全体のつり合いの式から

$$k\Delta x = mg + 2mg \quad \therefore \Delta x = \frac{3mg}{k}$$

問6 衝突直前のおもり3の速さを  $v$  とすると、力学的エネルギー保存則より

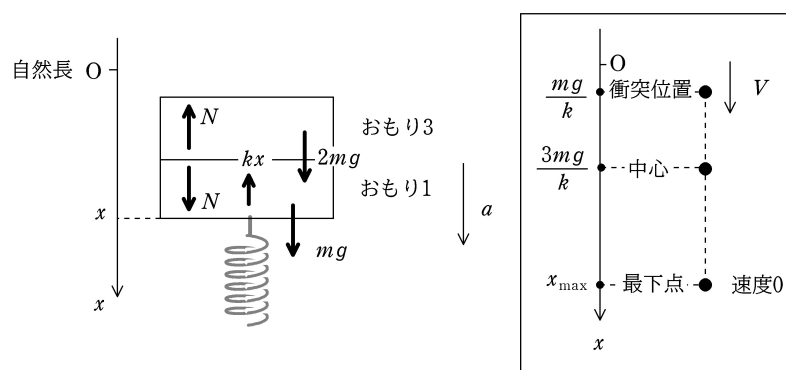
$$\frac{1}{2} \cdot 2m \cdot v^2 = 2m \cdot gh \quad \therefore v = \sqrt{2gh}$$

衝突直後のおもり1とおもり3の下向き速度を  $V$  とする。衝突直前後の鉛直方向の運動量保存則より

$$mV + 2mV = 2m\sqrt{2gh} \quad \therefore V = \frac{2}{3}\sqrt{2gh}$$

問7 おもり1とおもり3が一体となっている間の座標  $x$  における加速度を  $a$ 、おもり1とおもり3の間にはたらく垂直抗力の大きさを  $N$  とし、おもり1、おもり3それぞれの運動方程式を立てると

$$\begin{cases} \text{(おもり1)} : ma = -kx + mg + N & \dots \textcircled{1} \\ \text{(おもり3)} : 2ma = 2mg - N & \dots \textcircled{2} \end{cases}$$



① + ② より

$$3ma = -kx + 3mg = -k\left(x - \frac{3mg}{k}\right) \quad \dots \textcircled{3}$$

であるから、中心座標は  $\frac{3mg}{k}$  である。最下点の座標を  $x_{\max}$  とし、単振動のエネルギー保存則より<sup>\*1</sup>

$$\begin{aligned} 0 + \frac{1}{2}k\left(x_{\max} - \frac{3mg}{k}\right)^2 &= \frac{1}{2} \cdot 3m \cdot \left(\frac{2}{3}\sqrt{2gh}\right)^2 + \frac{1}{2}k\left(\frac{mg}{k} - \frac{3mg}{k}\right)^2 \\ \therefore x_{\max} &= \frac{mg}{k} \left\{ 3 + 2\sqrt{1 + \frac{2kh}{3mg}} \right\} \quad \dots \textcircled{4} \end{aligned}$$

問8 ③を①に代入して、 $a$ を消去して  $N$  式をつくると

$$N = 2mg - 2ma = 2mg - 2 \cdot \left\{ -\frac{k}{3} \left( x - \frac{3mg}{k} \right) \right\} = \frac{2}{3}kx \quad \dots \textcircled{5}$$

よって、 $x = d$  のとき、 $N = \frac{2}{3}kd$

問9 ⑤より、 $N = 0$  のとき、 $x = 0$ 、つまりばねの自然長からの伸びの大きさは **0**。また、このとき、弾性力は **0** なのである。おもり2にはたらく垂直抗力の大きさを  $R$  とし、おもり2のつり合いより、

$$R = 2mg$$

問10 振動の上端が  $x = 0$  になればよい。上端と中心の距離は  $\frac{3mg}{k}$  であるから、最下点の座標は  $\frac{6mg}{k}$  である。これを④の  $x_{\max}$  に代入して

$$\frac{6mg}{k} = \frac{mg}{k} \left\{ 3 + 2\sqrt{1 + \frac{2kh_0}{3mg}} \right\} \quad \therefore h_0 = \frac{15mg}{8k}$$

<sup>\*1</sup> 速度を  $u$  とし、 $\frac{1}{2} \cdot 3m \cdot u^2 + \frac{1}{2}k\left(x - \frac{3mg}{k}\right)^2 = \text{一定}$  が成り立つ。

## [ III ]

問 1 接点  $2k-1$  におけるキルヒホッフ第 1 法則より,  $I_{2k-1} = I_{2k-3} + I_{2k-2} \quad \cdots \textcircled{1}$

問 2 接点  $2k+1$  の電位を  $V_{2k+1}$  として, 「接点  $2k+1$ 」→「接点  $2k-1$ 」→「接点  $2k$ 」についての電圧降下を考えて

$$V_{2k+1} - R_1 I_{2k-1} - R_1 I_{2k-2} = 0 \quad \therefore V_{2k+1} = R_1 (I_{2k-1} + I_{2k-2}) \quad \cdots \textcircled{2}$$

問 3 「接点  $2k+1$ 」→「接点  $2k+2$ 」の電圧降下を考えて

$$V_{2k+1} - R_1 I_{2k} = 0 \quad \therefore V_{2k+1} = R_1 I_{2k} \quad \cdots \textcircled{3}$$

②, ③ より,

$$R_1 I_{2k} = R_1 (I_{2k-1} + I_{2k-2}) \quad \therefore I_{2k} = I_{2k-1} + I_{2k-2} \quad \cdots \textcircled{4}$$

問 4 まず, 接点 1 と接点 2 の電圧は接点 3 と接点 4 の電圧と等しいく, その間の抵抗がともに  $R_1$  であるから,  $I_1 = I_2$  である. そこで,  $k=2$  を ① に代入すると

$$I_3 = I_1 + I_2 = 2I_1$$

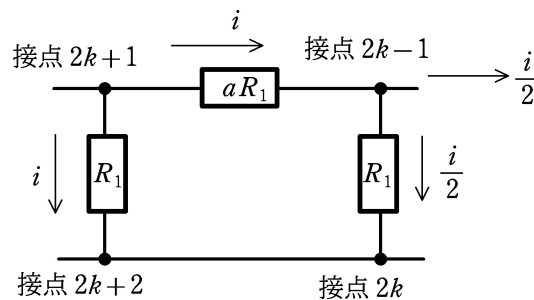
さらに ④ に  $k=2$  を代入して

$$I_4 = I_2 + I_3 = I_1 + 2I_1 = 3I_1$$

これらを繰り返して

$$\begin{aligned} I_5 &= I_3 + I_4 = 5I_1, & I_6 &= I_4 + I_5 = 8I_1, & I_7 &= I_5 + I_6 = 13I_1, & I_8 &= I_6 + I_7 = 21I_1 \\ I_9 &= I_7 + I_8 = 34I_1, & I_{10} &= I_8 + I_9 = 55I_1, & I_{11} &= I_9 + I_{10} = 89I_1 \end{aligned}$$

問 5 図のように,  $I_{2k-1} = I_{2k} = i$  とおくと,  $I_{2k-2} = \frac{i}{2}$  である. 「接点  $2k+1$ 」→「接点  $2k-1$ 」→「接点  $2k$ 」→「接点  $2k+2$ 」→「接点  $2k+1$ 」の回路の式を立てて



$$V_{2k+1} - aR_1 i - R_1 \cdot \frac{i}{2} + R_1 i = V_{2k+1} \quad \therefore a = \frac{1}{2}$$

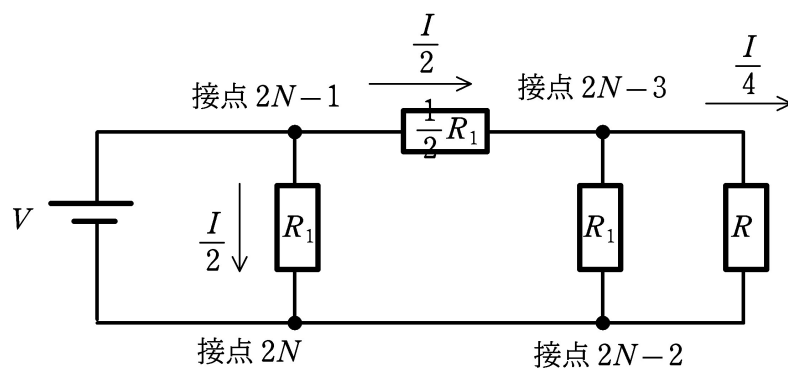
問 6  $I_2 = I_1$  であり,  $I_3 = 2I_2 = 2I_1$ ,  $I_5 = 2I_3 = 2^2 I_1$ ,  $\cdots$ ,  $I_{2k-1} = 2^{k-1} I_1$ ,  $\cdots$ ,  $I_{2N-3} = I_{2(N-1)+1} = 2^{N-2} I_1$  である. よって,  $I = 2I_{2N-3} = 2^{N-1} I_1$

問 7  $I_{2N-2} = I_{2N-3} = \frac{I}{2}$  である. 「電源」→「接点  $2N-1$ 」→「接点  $2N$ 」の回路の式から

$$V - R_1 \cdot \frac{I}{2} = 0 \quad \therefore I = \frac{2V}{R_1}$$

問 8 抵抗  $R$  に流れる電流は  $\frac{I}{4}$  である. また, 接点  $2N-3$  の電位は, 問 7 の  $I = \frac{2V}{R_1}$  を用いて

$$V - \frac{1}{2} R_1 \cdot \frac{I}{2} = V - \frac{R_1}{4} \cdot \frac{2V}{R_1} = \frac{V}{2}$$



であるから，抵抗  $R$  にかかる電圧は  $\frac{V}{2}$  よって，オームの法則より

$$\frac{V}{2} = R \times \frac{I}{4}$$

$$\therefore R = \frac{2V}{I} = 2V \times \frac{R_1}{2V} = R_1$$

問9 図5における抵抗部分について合成すると，（並列合成してから直列合成） $\frac{8}{5}R_1 = \frac{8}{5} \times 25 = 40\Omega$  である．そこで，リアクタンス  $60\Omega$  のコンデンサーと  $100\Omega$  のコイルと抵抗値  $40\Omega$  の直列回路を考える．位相のずれに注意して，回路の式を立てる． $I_0 = 100\text{mA} = 0.100\text{A}$  とする．

$$V_0 \sin(\omega t + \phi) - 60 \times 0.100 \times \sin\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) - 100 \times 0.100 \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{2}\right) - 40 \times 0.100 \sin \omega t = 0$$

$$\therefore V_0 \sin(\omega t + \phi) = 4\sqrt{2} \sin\left(\omega t + \frac{\pi}{4}\right) \quad \cdots(*)$$

よって， $V_0 = 4\sqrt{2} \approx 5.6\text{V}$

問10 (\*) より， $\phi = \frac{\pi}{4}$